

物理屋のための電子回路論 第1回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年9月13日

第1章 電磁場と電子回路

1.1 この講義について

1.1.1 講義の目指すところ

本講義は「電子回路」(electronic circuit) について「論」じるものである。物理学で使用する日本語では、その体系が確立されたものについては「量子力学」のように「学」あるいは「力学」をつけ、未確定の仮説でリサーチを行う対象については「量子論」のように「論」と格下げして呼ぶ、という説があるが、電子回路論についてこれを当てはめるのはやや穿ちすぎのように思われる。「回路学」と称する分野もあると思うが、本講義で対象とするのは体系化された「学」というよりは、様々な「ものの見方」、そして実験の役に立つ四方山な知識であり「論」じるのが適当であろう。

本講義の目標は、(1) これから物理学の実験研究に進む学生諸君に、必要最小限の電子回路の日常的知識を与えること、(2) 様々な「物理的なものの見方」、「コンセプト」、「言語 (ランゲージ)」（これらは実のところみな同じ）の例を電子回路を舞台に提示し、これまで学んできた物理学の実体演習を行うこと、である。

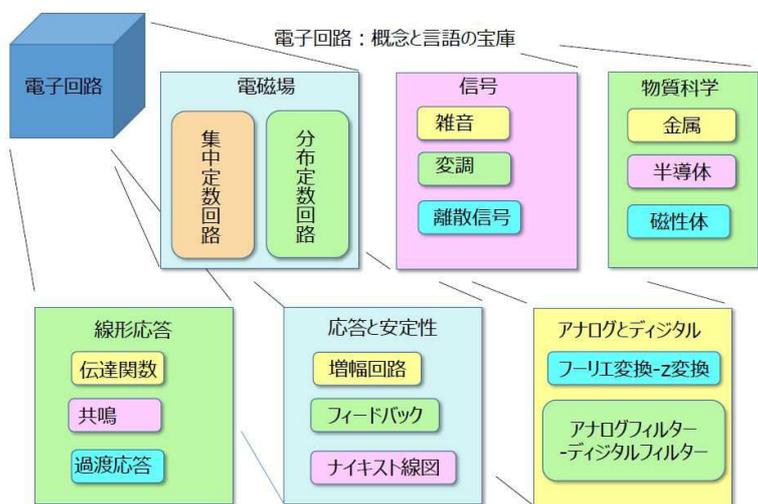
(1) については、30年も昔に比べれば分野にもよるが物理実験に求められる電子回路の知識は随分と軽くなっているということはあるだろう。しかし、それでも最低限これだけは、という知識は確かに存在する。これらは「回路学」や「電磁気学」として確立している部分を含んでおり、半世紀程度たっても古びるものではない。一方、長足の進歩を遂げ、日々新しくなっているが、とりあえず向こう数年の間くらい、とても便利なので知っておいた方がよい、知識についても多少は触れる予定である。

(2) は理論研究に進む諸君も含めて眺めておいてもらっても損はないのではないかと講師が考える事柄である。これまで、物理学科で勉強してこられた諸君は、分子、原子、原子核、素粒子、固体、電磁場、重力場、など、物理的な実体に適用される物理学を学んできたことと思う。それはもちろん、王道の物理学であるが、それが物理学のすべてではない。自然というものを捉えるために、非常に多くの概念 (コンセプト) が創出され、それらの間に成立するある意味メタな物理学はこれもまた大変広大である。電子回路はその格好の舞台であり、ぜひその辺を眺め味わってほしいと思う。

最後に、講師は小学校から電子回路工作にはまり、アマチュア無線や Broadcast Listening (BCL) にはまり、中学では地方から電車で2時間かけて秋葉原まで部品買いに出かけ、毎夜新しい回路を作っては部品を壊したり高圧に感電していた典型的なヲタクである (漫画、メイド、AKB、といった趣味はない、念のため)。つまらない電子回路の四方山話は実に楽であり、話し手としては楽しいが、そのような方向へ走って行ってしまうまい、気を付けて論じていこうと思う。昨年度も同じ講義を、それなりに懸命に話したので、重なる部分も当然多い (というか大体同じ) が、それはご容赦願いたい。

1.1.2 講義の概要

下にこの講義で見えていく電子回路の様々な側面を大まかにまとめてみた。電子回路は無限ともいえる切り口で見ることができる。ここに並べた6つの切り口も、相互に独立とは言えないし、とても粗い見方でしかない。一方、いずれも統合的な見方であって、電子回路を離れてもっと多くの事象にも適用できる汎用的なものでもある。ぜひ、様々な概念をどのように導入し、それらを運用する「言語」をどのように編み出すか、味わってほしいと考えている。



1.2 「電子回路」とは何か

ということを半年かけて講義するわけだから、いきなりこの問いかけに簡単な答えが出るはずもなく、じゃあ半年後にはわかってますか、と言えばそれも心もとない。しかし、ここで考える電子回路について、簡単な見方、方向性のようなものは考えておきたい。

ここでは電子回路を、電磁場を人間が何らかの目的のために制御・使用することを目指して作り上げた空間的構造物、としておこう。人間が作ったものだから人工・天然の区別をするならば人工に分類されてしまうが、時には天然の回路を考えることもあるので、あまり厳密な定義ではない。電磁場を制御するためには様々な物質を使用するが、特に重要なのが**金属 (metal)** と呼ばれる一連の物質群である。まず、そこから論じ始めることにしよう。

1.2.1 電磁場と金属



図 1.1 飛行機に落雷 (被雷) した瞬間の写真

まずは、左の写真を見ていただこう。これは大阪 (伊丹) 空港での写真だそうだが、離陸中の飛行機に落雷した瞬間のちょっと衝撃的な写真である。上から雷が落ちてきたのだとすると、機首部分に落雷、尾翼の少し前付近から地面に向かって再落雷しているように見える。こんなことがあると、機体が黒焦げあるいはバラバラになってしまうような悲劇を想像するが、実際には乗員乗客は大きな音と窓の外に光を感じたものの、何事もなく離陸、無事目的地に着陸、機体に特に損傷もなかったという。

これは、金属という物質が電磁場に対して有する極めて大きな遮蔽力を物語っている。電磁気学において、金属でできた空洞中では外部の静電場が遮蔽されることを学んだと思うが、この事例

は、落雷のように比較的速く変化し、大きな電流を伴うような外部擾乱に対しても金属がその遮蔽性を発揮すること

を示している。

それは、どの程度の速さまで応答できるのだろうか。金属中には莫大な数(密度)の自由電子が存在し、これらが電場に対して非常に速く移動することで遮蔽が行われる。その応答速度を特徴的な振動数で表すと、**プラズマ振動数**(Plasma frequency)と呼ばれる量になる。古典近似で求めてみると [1], まず, 自由電子の運動方程式を, 質量 m , 運動方向座標 x , 素電荷 e , 電場 E , 時間 t に対して

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE \quad (1.1)$$

と書く。これから角振動数 ω の電場に対して x も ω で応答するとし, $E = E_0 e^{-i\omega t}$, $x = x_0 e^{-i\omega t}$ とすると,

$$m\omega^2 x_0 = eE_0$$

である。この振幅 x_0 で振動する電子を, サイズ x_0 , 電荷 $-e$ の双極子が振動していると見ると, そのモーメントは $-ex_0$ である。これによる, 分極 (単位体積中の総モーメント) P は, 自由電子密度を n として

$$P = -nex_0 = -\frac{ne^2 E_0}{m\omega^2} \quad (1.2)$$

となる。振動数 ω に対する物質の誘電関数 $\epsilon(\omega)$ は一般に

$$\epsilon(\omega) = \frac{D(\epsilon)}{\epsilon_0 E(\omega)} = 1 + \frac{P(\omega)}{\epsilon_0 E(\omega)}$$

と表されるから, (1.2) を代入して ($E(\omega) = E_0$ より)

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m \omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 \equiv \frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \quad (1.3)$$

と表される。この ω_p がプラズマ振動数である。

(1.3) からわかるように, $\omega \ll \omega_p$ の領域では金属は非常に大きな負の誘電率を持ち強力な遮蔽効果を発揮するが, $\omega = \omega_p$ で誘電率はゼロとなりそれより大きな ω では正に転じ遮蔽効果が失われる。自由電子密度 n は典型的金属である銅 (Cu) では, $8.5 \times 10^{22} / \text{cc}$ 程度であり, また状態密度から計算した有効質量は, 真空中静止電子の 1.3 倍程度である [2]。これから (1.3) よりプラズマ振動数を計算すると, $2.3 \times 10^{15} \text{ Hz}$ (ただし, 角振動数ではなく, 周波数にしてある) となる。これは電磁波の波長としては 130 nm 程度で, 近紫外に相当する。量子力学, 量子統計学が描く金属中の自由電子像は随分と異なっているので修正が必要であるが, オーダー的にはそれ程変わらない値が得られる。以上の見積もりから, 金属によって電場が大変な速さまで遮蔽されることがわかった^{*1}。

では, 磁場はどうか, という静磁場は常磁性金属では遮蔽されることはない。時間変化する磁場に関しては渦電流により遮蔽が生じる。磁気遮蔽をするには透磁率が非常に大きく, 磁化が変化しやすい特別な磁性体が必要である。従って電磁場の内, 人工系を作る制御性が高いのは電場の方である。また, 電子をはじめ電荷はモノポールが多数存在しているのに対し, 磁荷はダイポールでしか存在しないので, ダイナミックな変化が難しく (遮蔽と同じ原因による), このことから電場・電位, というものが電子回路の最重要概念の一つとなる。とは言っても, 無論, 電場-磁場の間には対称性があり, これらは切ることのできない関係にあって磁場を制御・使用する電子回路部品 (後述) は多数存在する。また, ダイポールである電子のスピン自由度をこのような「電子回路」として利用しよう, というのが最近はやりのスピントロニクスに他ならない。

1.2.2 局所電磁場概念と集中定数回路

人間が電子回路に要求することは極めて複雑多岐にわたる。中には大変複雑なものもある。この難しい要求に対して, Maxwell の方程式で記述される電磁場を使って答えていこう, というわけだが, いきなり仕様書を書かれて「やれ」, と言われても途方に暮れてしまう。

^{*1} ただし, この議論では実空間内距離の考察が欠落している。光速を超えて情報が伝わることはないから, 金属といえど遮蔽の影響が到達する速度は光速を超えることはない。この点も回路では当然問題となる。

そこで複雑で長大なプログラムを作成するときのことを考えてみる。仕様書に沿ったアルゴリズムをいきなりプログラムするのは大変困難である。まずは、簡単な単機能のプログラムを書き、その数を増やしていく。これらは言語によってサブルーチン、関数、クラスなどと様々に呼ばれるが、やがてこれらを寄せ集めたり、継承したりしてだんだんと大きく複雑な処理をこなすプログラムにして行く。

同様なことを電磁場でも考えよう（というよりこちらの方がずっと先であるが）。何らかの入力（今の場合、外部境界条件の変化による電磁場環境の変化）に対して簡単な応答をする系を考える。このような系を「局所電磁場」と呼ぶことにしよう*2。プログラムの例に倣えば、このような局所電磁場を色々と沢山取りそろえることになるが、問題はこれらを寄せ集めると、それぞれは勝手に「局所」電磁場と名乗っていても、遠距離力である電磁力は相互を結合してしまい、独立性が失われてしまうこと、また逆に、ある局所電磁場の応答を別の局所電磁場に伝える手段が必要になること、である。プログラムでいえば、局所変数が使えず、他の関数で同名の変数を使うとこちらの動作に影響が出たり、あるいは演算結果を受け渡す手段がなかったり、という問題に相当する。

このために、上で述べた金属の強力な遮蔽能-結合したものを同電位にする能力を使用する。そもそも局所電磁場の形成にも金属を使用して等電位面を形成することがしばしば行われているので、これらの金属部品を金属で結合する。結合された金属部品はこれにより等電位となるので、各局所電磁場を安定化させることができる。また必要とあれば、相互の静電結合を遮蔽によりカットすることができる。また、ある局所電磁場に何らかの変化が生じれば、それは電流となって結合金属を伝わり、他の局所電磁場にその変化を伝える（すなわち電気信号となる）。このような結合金属はもちろん、1つではなく、多数存在する。それらの相対電位は固定されている場合もあるが、そうと限っているわけではなく、変化し、そのこと自身が信号を伝達する場合もある。

思い切り抽象的に話を進めてきたため、奥歯に物が挟まったような言い方になってしまったが、物理屋としては、やはり電子回路を眺めるときに一体どのような系なのか考えてほしいと思い、このように論じてきた。ここで、普通の呼称を導入すると、上記「結合金属」は**配線 (wiring)**である。金属の強力な遮蔽能を考えると、電位を一定に保つためであれば、通常はごつい塊である必要はなく、細い線で十分に足りる。そして、「局所電磁場」は**部品 (component)**である。

このように、金属によってある電磁応答をする系が形成されている場合、これを**回路 (circuit)**と呼ぶ。特に上記のように部品を配線が結合する、という描像で捉えられる回路のことを**集中定数回路 (lumped constant circuit)**と呼ぶ。後述する分布定数回路との対比において「集中」という訳語が使用されているが、本来は“lump”という動詞、すなわち「ひとまとまりにした」ことが強調されており、部品（局所電磁場）概念を指している。次の「定数」という言葉も不思議に響くが、これは次章で見る線形応答を念頭にしたもので、線形応答ではその応答特性は比例係数で表されるので、1つの部品は1つの係数-定数で表される。

1.2.3 「端子」概念

以上、高級言語によるプログラミングとの対比で集中定数回路を考えてきたが、逆に、集中定数回路的にプログラミングを行う言語も存在し、グラフィカルプログラミングと呼ばれる。実験機器制御のためによく使用される Labview などはその代表である。そこで再びこのグラフィカルプログラミング言語による類推を考えてみると、実験機器は言語上では virtual instrument (VI) として扱われ、実験データを様々なインターフェイスを通して吐き出してくる。回路に相当するプログラム部分は、これらを受け取り、加工・表示・記録する役割を担う。この時 VI とプログラム部分、あるいはプログラムの様々なかたまりの間もやはり配線によりつながれることになる。

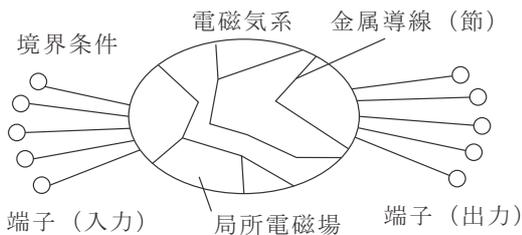
さて、VI やサブルーチンなど lump されて考えられる部品たちは、いきなり配線されてしまうのではわざわざ分割した甲斐がない。信号を送り込み、送り出すラインを設置し、個別に動作チェックしてから各ライン間を配線する。この「ライン」に相当するのが**端子 (terminal)**である。金属導線による配線は、回路の様々な部分を結合し、これら

*2 講師の勝手な造語である。「局所場」(local field) という用語はプラズマ物理学を始め、固体物理学その他の多体問題を扱う学問ではお馴染みである。混乱しないようお願いしたい。もう少し良い用語を考えたいが、「集中定数回路」が導入されるまでの一瞬の一時的な用語であるので、とりあえずご容赦願いたい。

の間の信号伝送を担っている。端子は、その一部を外部に接続可能な金属として取り出したものである。言い換えれば、回路に何らかの境界条件を与え、その応答を何らかの電磁的物理量として取り出すのが端子である。

このように定義すると、端子というのは集中定数回路の下位概念のような感じがするかもしれないが、そうではない。ある系が限られた数か所を除いて孤立しており、外界とのやり取りがこの数か所のみで行われる場合、この「数か所」が端子である。この時、端子にいかなる外部境界条件を与えるかを**バイアス条件** (bias condition) と呼ぶ。これらは、電子を量子力学的な波動として扱わなければならないナノスケールのデバイスにおいても重要な概念である。

1.2.4 電子回路概観



そこで、これまでざっと見てきた電子回路の概念をまとめてみると、左のようになるだろう。要するに、金属で要所をまとめられた電磁気系で、その境界条件は一部の端子によって決められる。このような境界条件の決定にかかわる端子を**入力端子** (input terminal) と呼ぶ。この電磁気系の境界条件に対する応答はやはり端子を通して次の回路あるいは電子回路と他の物理系を結合する**トランスデューサー** (transducer) に伝えられる。このような端子

が**出力端子** (output terminal) である。電磁場が主役の形であるから当然であるが、このような静的な図には現れない重要な共通パラメタとして時間がある点には留意しておこう。

1.3 2端子素子

集中定数回路の概念から、回路部品とは局所電磁場を指すが、更に現実の電磁場を単純化・抽象化したものである。単純化の具体的な方法が端子であり、部品外部からは端子の電位と端子を流れる電流以外の物理量(物理現象)は認知することができない(認知する必要がない)。端子を通した時にその部品がどのように見えるかがその部品の**特性** (characteristics) ということになる。

回路部品は大抵2つ以上の端子を持っている。1つしか端子のないものとしては、アンテナ、アース(接地)など、また、灯台端子、テフロンポストなどと呼ばれるものもある。この最後のグループは物理的に配線を支えることがその役割であり、現実の回路製作には大切であるが、モノターミナル素子、とは言えない。アンテナ、アースは全体として1つの部品、と思えば、2端子素子と考えることができる。というわけで、まずは、2端子を持つ回路部品について見ていくことにする。

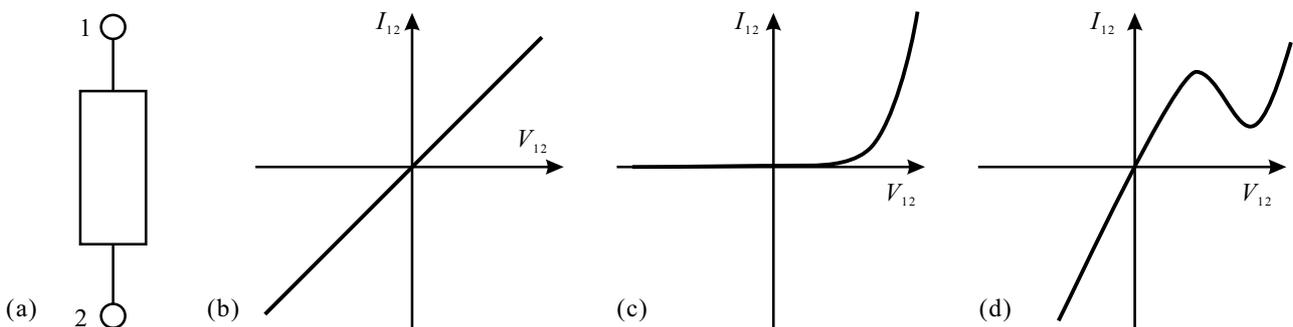


図 1.2 (a) 2端子素子のシンボル図. (b) 抵抗器の電流電圧特性. (c) ダイオードの電流電圧特性. (d) トンネルダイオード(江崎ダイオード)の電流電圧特性. (いずれも模式図)

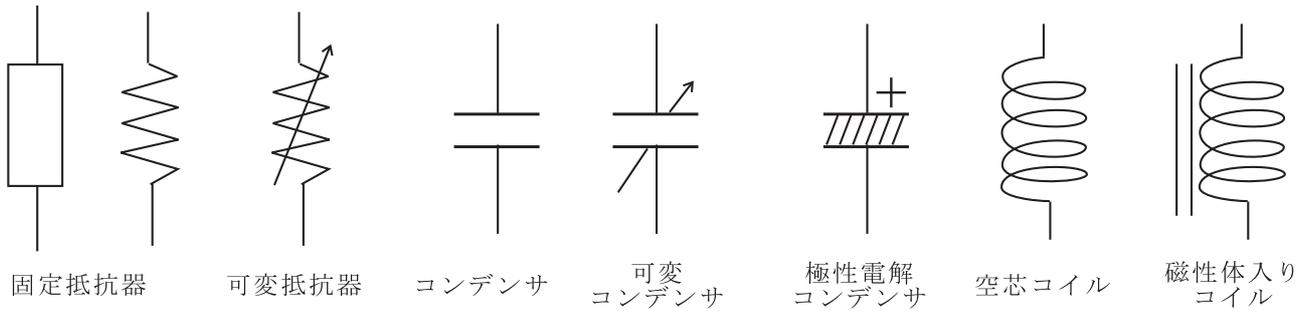


図 1.3 2 端子素子の回路記号例

1.3.1 電流電圧特性

2 端子素子を箱から端子が出ているシンボルで表すとする (図 1.2(a)). 2 端子素子を特徴づけるわかりやすい特性が**電流電圧特性**である. 電流の変数名を I , 電圧の変数名を V とすることが多いことから, I-V 特性と略されることが多い. 端子 1, 2 の間の電圧が V_{12} の時, 1→2 間に流れる電流を I_{12} が V_{12} の関数として

$$I_{12} = f(V_{12}) \quad (1.4)$$

のように書けるとき, 関数 f をこの素子の電流電圧特性と呼ぶ.

2 端子素子には I-V 特性が定義できるものとできないものが存在する. **過渡応答**のことを考えると, 現実の素子で厳密に I-V 特性が定義できる素子は存在しない. が, 時間スケールを応答時間よりも十分長くとれば, (1.4) が良い近似となるし, 過渡応答に関しても, (1.4) の I-V 特性を持つ素子と, それ以外の素子との組み合わせと考えることで近似することができることが多い. 図 1.2(b), (c), (d) にそれぞれ抵抗器, ダイオード, トンネルダイオードの I-V 特性の模式図を描いている. 抵抗器やダイオードの特性のように f の逆関数 g が定義できる場合は

$$V_{12} = g(I_{12}) \quad (1.5)$$

と書いて, これも I-V 特性と呼ぶ. また, 図 1.2(d) のトンネルダイオードのような特性の場合は単調でないため g は単純には定義できないが, 多価関数として定義することにする.

1.3.2 受動素子

(1.4) は単なる関数関係を示しているに過ぎない. 実際の素子では, まず, 境界条件, すなわちバイアス条件を (1.5) を拡張して, 演算子 \hat{A} について

$$V_{12} = \hat{A}I_{12} \quad (1.6)$$

と書く. 小中学校の理科以来よく知られた 3 種類の回路素子について,

$$V_{12} = RI_{12} \quad (\text{抵抗器}), \quad (1.7a)$$

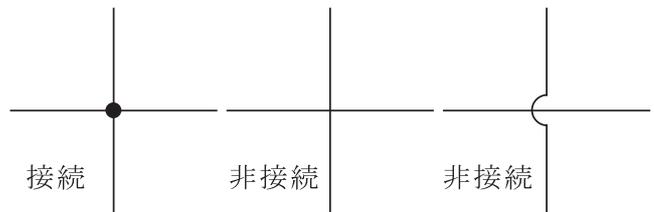
$$V_{12} = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int I_{12}(t') dt' \quad (\text{キャパシタ}), \quad (1.7b)$$

$$V_{12} = L \frac{dI_{12}}{dt} \quad (\text{インダクタ}), \quad (1.7c)$$

と定式化することができる. これらは, 線形システムの基本であるインピーダンスを構成するための基本的な (受動) 回路素子 (passive element) である. R, C, L は定数で, それぞれ**抵抗** (resistance), **キャパシタンス** (容量) (capacitance), **インダクタンス** (inductance) と呼ぶ.

1.4 回路図

ここまで、「回路」というものの構成要素概念を色々と導入してきた。これらの組み合わせにより回路を形成するための言語に相当するものを考えてみる。言語はやや抽象度の高い概念によって定められる。回路言語の最も基本的な概念のひとつ、回路図を導入しておこう。



1.4.1 基本的な回路図

回路素子のもっとも簡単な結合法は、すでに述べたように金属導線で端子を直接結合するものである。結合された部分は電磁気的には同電位を表し、回路網の取り扱いでは節 (node) と呼ばれる。導線を線で表し、結合の様子をトポロジカルに2次元の図面上に表したものを回路図 (circuit diagram) と呼ぶ。各素子にはそれぞれ特徴的なアイコン (回路記号) を割り振って素子の素性がわかるようにする。回路記号には様々な流儀があるが、規格によって統一化が図られており、図 1.3 に示したジグザグ型の固定抵抗器記号はよく使用されて馴染みもあるものであろうが、国際規格では長方形を使用することになっている。導線同士の結合は右図のように黒い小さな丸で表す。黒丸がない導線のクロスは、結合がなく単に図面上の都合により線が交差しているだけである。この点を誤解しないよう、右図のように丸く線をまたぐように描いていた時期もあるが、現在ではこのような流儀は殆ど見られない。

1.4.2 様々な「回路図」

回路図には非常に多くの種類、階層がある。図 1.4 はかつてのアナログ通信時代に全盛を誇ったスーパーヘテロダイン型受信機の、(a) ブロックダイアグラム、(b) 実体配線図と呼ばれる回路図形式である。昔懐かしい、電源トランスを搭載し、真空管を用いた回路であるが、「回路図とはどのようなものか」を感じるための例に過ぎないので、当然内容を理解する必要はない。同じ回路を表していながら、全く異なる図面になっていることがわかる。

ブロックダイアグラムでは、回路は機能ごとに極めて簡単化され、信号の流れを線で表している。消費エネルギーを供給するための電源とその供給ラインなどは省略されている (もちろん、明記する場合もある)。複雑な回路全体の

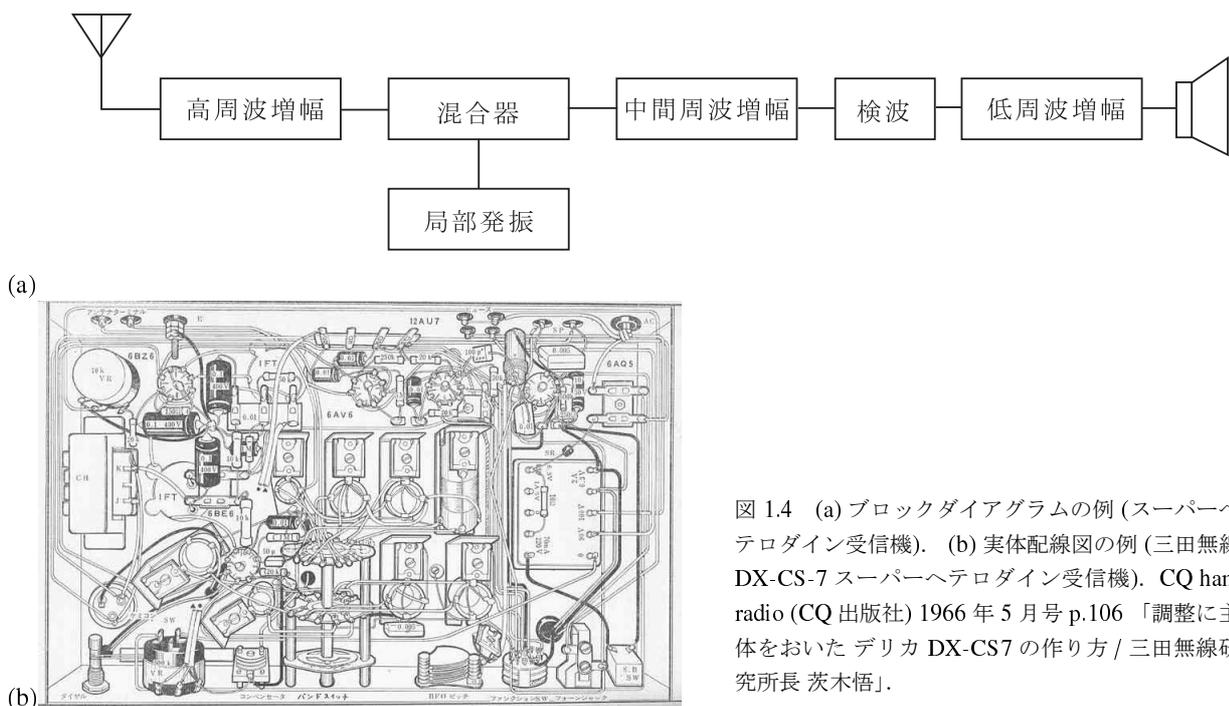


図 1.4 (a) ブロックダイアグラムの例 (スーパーヘテロダイン受信機). (b) 実体配線図の例 (三田無線 DX-CS-7 スーパーヘテロダイン受信機). CQ ham radio (CQ 出版社) 1966 年 5 月号 p.106 「調整に主体をおいた デリカ DX-CS7 の作り方 / 三田無線研究所長 茨木悟」.

動作を理解するためには便利，というより必要不可欠である．このように大幅な簡単化・抽象化を行っても大きな回路になると複雑を極めたものになる．また，上に述べた「基本的な回路図」の読み方に慣れた技術者は，頭の中で半ば無意識にブロックダイアグラムへの写像を行っていることが多い．ちなみに，図 1.4 の受信機を，1.4.1 の部品 + 配線による回路図で表すと，図 1.5 のようになる．

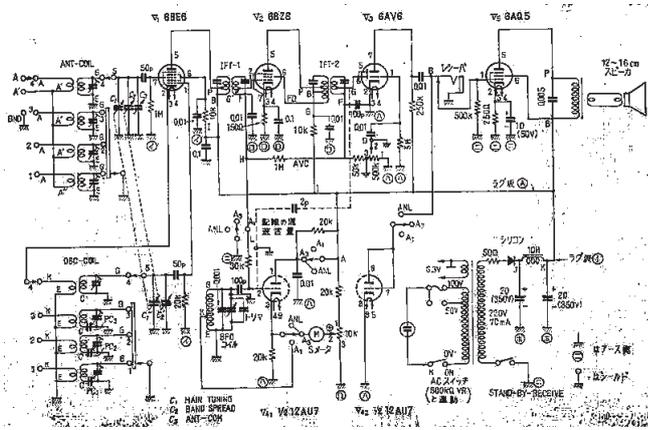


図 1.5 図 1.4 の受信機の回路記号を使用した基本的回路図．

図 1.5 のような回路図は，近年ほとんど見かけなくなつた．回路図というよりは，部品配置や配線を見やすく描いた絵であり，ホビーとして真空管回路を組み立てる人にはたいへん助けになった．というのも，このようなプリント基板を使わない回路では，抵抗器やコンデンサなどの小物部品は配線しながら配置していったからである．いずれにしても，回路図というものが現実の回路のモデリング，抽象化であることが実感できると思う．講師の感覚では，現実世界の現象を幾つかの簡単な自由度（あるいはその集団）に落としこんでそれらを結ぶ数学で記述する物理学のモデリングや，地球表面を地図という 2 次元図形に落としこむ作業，トポロジカルな結合だけに着目する路線図への抽象化，資本の流れなど抽象的な事象を逆に図面上に可視化する作業など，様々なモデリング，抽象 ↔ 具象の変換作業のひな形が回路図にはあると思っている．

1.5 抵抗器

いきなり抽象論を繰り広げてもつまらないことこの上ない（少なくとも実験屋である講師は実は抽象論は好きでも得意でもない）．延々抽象論を続けてすっかり肩が凝ってしまった．物理実験を行う上で大切な電子回路の知識（アキバ的，あるいはニッポンバシ的知識）を伝授することもこの講義の大切な目的であるので，ここで，代表的な 3 つの受動素子のやや具体的な点を見ておこう．すなわち，ここからしばらくの間，2 端子素子のペールをひん剥いて「端子の向こう」を覗いてみることにしよう．鬼が出るか蛇が出るか，はたまた，鶴が機を織っているのか，固体物理屋にとっても非常に興味深い世界が広がっている．

(1.7a) のオームの法則は，近似則ではあるが，フェルミ準位付近の状態密度をほぼ一定として良い合金類その他の物質においては広い電圧電流範囲において非常に良く成立する．固定抵抗器とはこれらの材料を適当な形状として配線しやすい金属電極（端子）を 2 つつけたものである．

一般の電流電圧特性 (1.5) でも，電圧が「飛び」を示すなどの特別な点を除いて一定の狭い電流（電圧）範囲であれば，微分抵抗

$$R_d \equiv dg/dI_{12} \quad (1.8)$$

を考え， $\delta V_{12} = R_d \delta I_{12}$ と (1.7a) の類似型に書くことができる．電子回路で「抵抗器」と呼ぶ場合は，一般にあらゆる電流電圧範囲で (1.7a) が成立するもの，とされ（逆に現実にはそのような理想的抵抗器は存在しないが）ているが，小振幅の高周波回路などを考える際には (1.8) によって抵抗器に置き換えた等価回路とする場合もある．

1.5.1 各種抵抗器

抵抗器も無数に分類することができる．以下幾つかの分類を示しながら抵抗器を紹介する．

(a) 回路図的分类

(1.7a) の R が変化しない固定抵抗器と何らかの外部パラメーターによって変化する可変抵抗器とに分類される．固定抵抗器についてはこの後見ていくことにして，物理実験で良く使用する可変抵抗器を見ておこう．

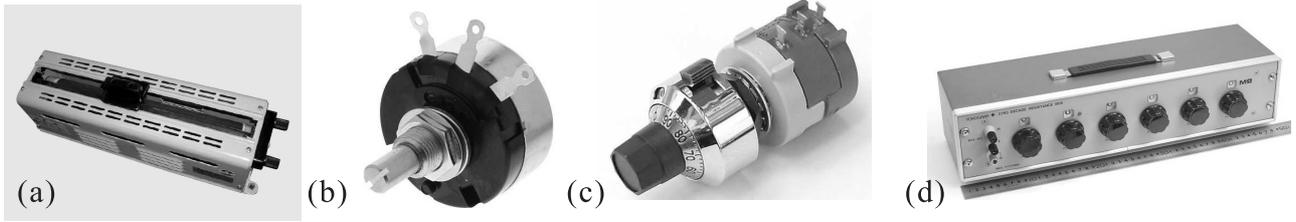


図 1.6 (a) 直線摺動型可変抵抗器 (b) 回転型可変抵抗器 (c) ヘリカルポテンシオメータおよびパーニアダイヤル (d) 桁式(ディケイド)標準抵抗器

代表的なものを図 1.6 に示している。(a) は小学校の理科などでもお馴染みの直線摺動接触を用いた可変抵抗器で、巻線形の裸線の抵抗の上を接点を滑らせるものや、細い単一の線の上をすべらせるものがある。巻線型の場合は、巻線のピッチにより調整できる分解能が決まる。

(b) は最も代表的な回転型の可変抵抗器で、このような形状の場合、機器表面につまみを出して人間が指で回転させることで抵抗が変化する。ドライバーで回転させることで抵抗値を変化させ、回路定数の調整に使う、トリマーと称するもの(半固定抵抗)もある。巻線形や、ディスク型のカーボン抵抗体を回転させるものなど様々である。バリオーム、ポテンシオメータなど様々な呼称がある。現在ではほとんど使われることはないが、かつては音響信号の最終段の増幅器のゲイン調整に使用され(古い機械にある「Volume」つまみ)、人間の耳の音量感覚に合わせて回転角と抵抗値とが非線形の関係にある A 型と呼ばれる可変抵抗器が存在する。これに対して、回転角と抵抗変化が比例関係にあるものは B 型と呼ばれる。写真を見ると、端子が 2 つではなく 3 つ出ていることに気づかれると思うが、これは、両端の端子に全体の抵抗が接続され、中央の端子に摺動接触片が接続されている。従って端子に 1, 2, 3 と番号を振ると、 $R_{13} = R_{12} + R_{23}$ で R_{13} は固定で、回転角を $\Delta\theta$ と置くと、 $\Delta R_{12} = -\Delta R_{23} \propto \Delta\theta$ である。

(b) の回転型は、通常 R_{12} を 0 から R_{13} まで変化させるのに、回転角は 2π 以下である。精密な抵抗制御を広範囲にわたって行いたい場合、この変化のために複数回(多くは 10 回転)の回転を必要とする(c) のヘリカルポテンシオメータ(「ヘリポット」と略される)を使用する。角度を精密に制御/測定するためのパーニアダイヤルを合わせて使用することが多い。

(d) のディケイド型標準抵抗器は、較正された固定抵抗器をロータリースイッチで切り替えて抵抗を変化させるもので、非常に高精度が得られるが、一般に体積が大きくなってしまふことと、特に高い桁を切り替える際にいわゆる「グリッチ」と呼ばれる大きなスパイクノイズが生じることなどの問題もある。

(b) 形状による分類

以降は固定抵抗器に限って分類を見ていこう。小信号(小電力)回路に使用する抵抗器について外形(形状)で分類するとすれば、まず面実装用であるか、そうでないか、ということで分類される。**面実装用**とは、半田合金(本来は Sn と Pb の合金であるが、環境への配慮から、Pb を Zn その他の金属で置換する鉛フリー半田が現在の主流である)を予め流したプリント基板(溶融合金内を基板をくぐらせることで流す)の表面に部品を配置し、オープン内で瞬間的に熱して半田合金を溶かしてリフロー状態にして完全自動配線するための部品形状のことを指す。このため、抵抗器では端子の「足」が出ておらず、図 1.7(a)のように、小さな四角い板状の抵抗体の両側に細い帯状の金属電極を出した形をしている。**チップ型抵抗**とも呼ばれる。また、講師は見たことがないが、表面実装用の円筒形の抵抗器もある、とのことである。

表面実装用でない抵抗器の特徴は、図 1.7(b)-(e)のように、配線用の端子線が両側に出ていることである。(b)、(c)、(e) が円筒形、(d) が角形である。円筒形の抵抗の多くは、円筒形にした皮膜抵抗体にスパイラルを切る形で抵抗値を上げているため、(1.7a)の R 成分以外に(1.7c)の L 成分も持っていることが多く、高周波回路では、薄膜に往復ラインを切ることで抵抗にしている角形の抵抗器の方が有利になることがある。

(c) 材質による分類

抵抗体の材質は、合金を薄い膜にした**金属皮膜抵抗**（メタル抵抗）が温度特性、経年安定性に優れ、良く使用される。上に述べたように、円筒形でスパイラルが切られているとインダクタンス成分が問題となるが、合金線を巻いて抵抗体とする**巻線抵抗**に比べるとむしろインダクタンスは少ない。一方、薄膜がそれ程電流を流せないのに対して線材は大きな電流を流せるため、電源回路などやや大きな電力を扱うところでは巻線抵抗が良く使用される。このような巻線抵抗は、放熱特性を良くするため、中空円筒にしてほうろうで固めたり（ホーロー抵抗）、セメントで固めたもの（セメント抵抗）もある。

一方、簡単な加工で済み安価なため良く使用されるのが**炭素皮膜抵抗**（カーボン抵抗）である。ただし、温度特性、経年安定性、ノイズ特性のいずれにおいてもメタル抵抗に劣っている。

面実装用チップ抵抗に良く使用される抵抗体として、金属や金属酸化物をガラスと混合し、高温で焼結させたメタル・グレーズ皮膜がある（metal glaze resistor）。

1.5.2 抵抗値の表示

電子回路部品は一般に大変小さく、部品名、端子（足、リード）の名前、特性値など、部品上の印刷や形状から一義的にわかるよう、様々な工夫が凝らされている。固定抵抗器も、抵抗値や消費可能電力（W 型）など、簡潔で紛れのない方法でわかるようになってきている。W 型については、形状と大きさから判定することができる。

抵抗値の表示で、円筒形の抵抗器で良く使用されるのが、図 1.7(b), (c) に見られる、**カラーコード**である。これは、国際電気標準会議（International Electrotechnical Commission, IEC）の規格によるもので右の表のように決められている。円筒形抵抗器の場合、図 1.7(b), (c) のように色のラインを付けておけばどの角度からも読み、間違いも少ないと期待できる。例えば、図 1.7(c) の中央の抵抗は、茶黒黒緑紫であるから、 $10\text{M}\Omega$ で 0.1% 精度の高精度な抵抗（これ程高い抵抗値では珍しい高精度）であることがわかる。

これに対して、図 1.7(a) のチップ抵抗の場合、3 桁ないし 4 桁の英数字が表示されている。これは、一番右側の数字が、これを q とすると、 $\times 10^q$ の意味である。残りの左の 2 桁ないし 3 桁の数字が抵抗値の有効数字を表している。アルファベットの R, L が使用されていることがあるが、R は小数点を表し、L は $\text{m}\Omega$ 単位の小数点を表す。また、例を挙げると、1R5 \rightarrow $1.5\ \Omega$, 2L00 \rightarrow $2\text{m}\Omega$, 1001 \rightarrow $1\text{k}\Omega$ などである。

図 1.7(d), (e) のように直接値が印刷されている場合もある。

色	数値	倍率	許容差
黒	0	10^0	-
茶	1	10^1	$\pm 1\%$
赤	2	10^2	$\pm 2\%$
橙	3	10^3	$\pm 0.05\%$
黄	4	10^4	-
緑	5	10^5	$\pm 0.5\%$
青	6	10^6	$\pm 0.25\%$
紫	7	10^7	$\pm 0.1\%$
灰	8	-	-
白	9	-	-
金	-	10^{-1}	$\pm 5\%$
銀	-	10^{-2}	$\pm 10\%$
なし	-	-	$\pm 20\%$



図 1.7 様々な小電力固定抵抗器。(a) 表面実装用。(b) 炭素被膜抵抗。1/2W 型から 1/8W 型まで。円筒形で抵抗値はカラーコード表示（後述）されている。(c) 金属皮膜抵抗。円筒型、カラーコード表示。1/4W 型。(d) 角型金属皮膜抵抗。(e) 1/2W 型円筒形参加金属皮膜抵抗。

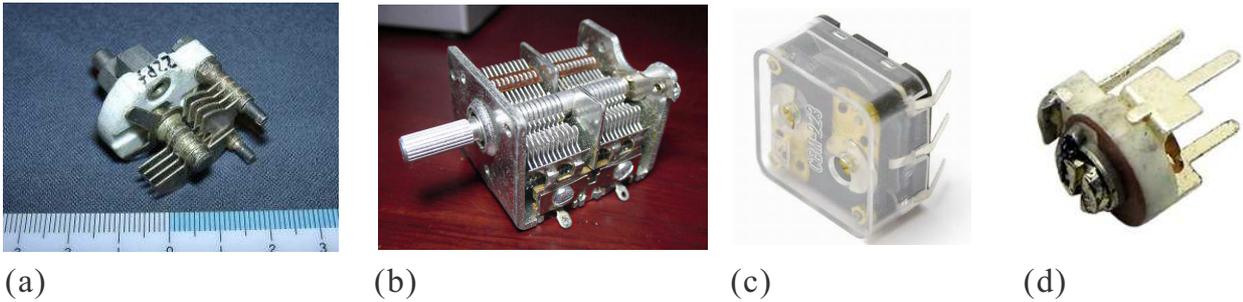


図 1.8 様々な可変キャパシタ. (a) 空気キャパシタ. 絶縁体にステアタイトを使っていて、日本では「タイトバリコン」と呼ばれている. 大電力用. (b) 2 連空気キャパシタ. (c) ポリエチレンキャパシタ. (d) セラミックキャパシタ (トリマー).

1.6 キャパシタ (コンデンサ)

高校物理以来なじみのあるキャパシタ (コンデンサ)^{*3}は、いわゆる平行平板キャパシタで 2 枚の金属板を対向させて配置したものであろうが、実際に使用されているキャパシタも実質これに近い構造を持つものが多い. そうでないものも、多くはこの変形である.

1.6.1 可変キャパシタ

現在余り使用されることはなくなったが、かつては特にラジオ受信機には必ずと言って良い程アナログのダイヤルが付いていてこの可変キャパシタ (variable capacitor)^{*4}のシャフトを回転させるようになっていた. 半円状の金属板を櫛の歯のように並べて一体として回転できるようになっており、同じような形状の金属板群と噛み合わせ回転角によりオーバーラップ面積 S が変化する. 電気容量 ((1.7b) の C) は、高校物理で学んだように、平行平板型では板の間隔を d として、

$$C = \epsilon\epsilon_0 S / d \quad (1.9)$$

であるから、円盤状であればほぼ回転角に比例して C が変化する. 図 1.8(a), (b) は誘電体部分に空気を使用する空気キャパシタで、サイズが大きくても余り問題にならない真空管回路によく使用されていた. 小さなラジオ等ではサイズを小さくすることが求められ、コイルのインダクタンスを大きくするためフェライトを入れて「バーアンテナ」としてアンテナと兼用し、誘電体にポリエチレンを使った図 1.8(c) のように小さなサイズのものが使用された. 誘電体では、その他、セラミック (図 1.8(d)) やマイカ、フィルム、サファイアなどが使われている.

1.6.2 (誘電体) 材料による分類

次に、固定容量キャパシタを見ていこう. キャパシタは、抵抗器以上に特に誘電体材料による特性差が大きいので、まずは誘電体材料による違いを見ておこう. すでに出てきた空気キャパシタは平行平板型に近いものだが、主な用途は可変キャパシタである.

^{*3} 電子回路に使用される capacitor も、かつては良く condenser とも呼ばれていたらしいが、英語では capacitor を使うのが普通になった. おそらく、化学実験等で使用する「凝結器」との混乱を避けるためと思われるが、日本ではこのような混乱もないせいか、かつての名残りで、高校物理以来コンデンサーと呼ばれている. ここでは、英語に合わせてキャパシタと呼ぼう. 困るのは、アキバでもトラ技でもコンデンサーでないと通らないことで、受講者はその点注意.

^{*4} 米英で何と言っているかは知らないが、日本では variable condenser を縮めて「バリコン」と呼ぶ. “varicap” というと、通常、回転式の空気キャパシタのことではなく、ダイオードの微分容量をバイアスで制御するタイプのものを指す.

(a) セラミック・キャパシタ

次に比較的平行平板に近いものが、酸化物(セラミック)を誘電体とするキャパシタである。構造的には単板型と積層型に分かれ、酸化物誘電体も低誘電率系、高誘電率系の2種類、更に温度特性や誘電正接などの特性を若干犠牲にしても高容量が必要な場合は、高誘電率酸化物にドーピングを行った半導体系、と呼ばれる材料が使われることもある。

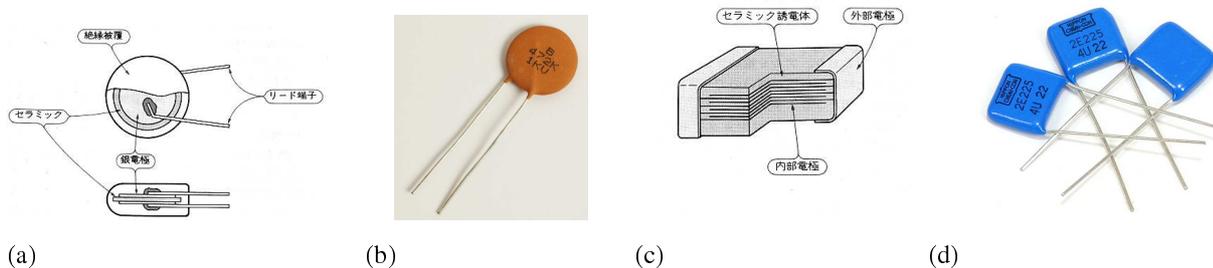


図 1.9 (a) 単板型セラミックキャパシタの構造, (b) 例. (c) 積層型セラミックキャパシタの構造, (d) 例.

単板型、積層型は文字通り一層の誘電体を単板で挟んだ構造になっているか、何層も重ねているかの違いである。単板型は図 1.9(a) のように簡単な構造であり、大抵 (b) のような外観をしていてわかりやすい。ただし、低誘電率材料、高誘電率材料で外形の差がないので、用途上問題になる場合、調べておく必要がある。積層型は、図 1.9(c) のように、可変空気キャパシタと同様、楕状の金属平板を入れ子構造にして重ねているため、ほぼ積層数倍の容量が得られる。形状は (d) のように四角くなったり、その他様々で、後述のフィルムコンと区別がつかず、やはり調べておく必要がある。容量表示は3桁の数字の印刷によるものが多く、単位は pF である。

高誘電率酸化物としては、強誘電体のチタン酸バリウム (BaTiO_3) が使われることが多い。強誘電体であるため、比誘電率が極めて大きく大きな容量が得られるが、応答が非線形になり(電子回路業界では「容量が電圧に依存する」と表現する)、温度変化も大きい。更に、強誘電ドメインの形成とランダムな動きに伴うバルクハウゼン雑音も無視できず、電気容量が回路定数として問題になるような精密な計測回路には使用できない。ただし、高周波特性は固体を誘電体として使用するキャパシタの中では良好である。不純物ドーピングにより導電性を生じさせた場合、そのまま金属板で挟んでもリークが大きすぎてキャパシタとして使用できないため、ドーブした材料を酸化膜で包んだり、金属板電極部分に堰層と呼ばれる薄い絶縁層を設けるなどの工夫をする。容量以外の諸特性は当然劣る。

(b) フィルム・キャパシタ

フィルム・キャパシタは、誘電体として有機ポリマープラスチックフィルムを用い、この両側に金属箔を配置、あるいは、フィルムに金属薄膜を蒸着したものを巻き込んだもの、あるいは、積層型にしたものである。良く使用されるポリマーは次のようなものである。

誘電体	略称	特徴
ポリエチレン・テレフタレート	PET	最も一般的な誘電体。耐熱・耐寒性に優れ、安価。ポリエステルとも呼ばれる。
ポリプロピレン	PP	絶縁抵抗が高く、低誘電正接(低損失)のため、大電流用などにも適している。ただし耐熱性にやや劣る。
ポリフェニレン・スルフィド	PPS	耐熱性、温度特性に優れるが、高価。
ポリエチレン・ナフタレート	PEN	耐熱性に優れるが、温度特性において劣る。

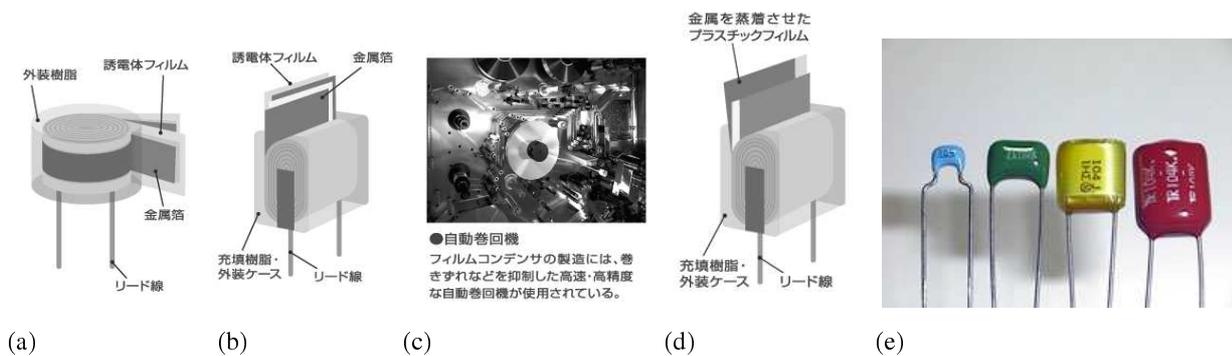


図 1.10 箔電極フィルムキャパシタ (a) 巻回型 誘導巻き (b) 巻回型 無誘導巻き (c) 箔電極キャパシタの巻回機蒸着型フィルムキャパシタ (d) 巻回型無誘導巻き (e) フィルムキャパシタの外観. TDK web ページ http://www.tdk.co.jp/techmag/electronics_primer/vol4.htm より.

図 1.10(a), (b) は箔電極を使ったキャパシタの構造模式図だが, (a) では一様に重ねて巻きつけ, 巻き出し部分と巻き終わりで両側の箔電極からリード線を出しており, 巻いたことで電極がコイルとして働きインダクタンスを生じている. これに対して, (b) では箔電極を表と裏でずらしておき, 側面からリード線を引き出すことでインダクタンス成分を失わせる無誘導巻きになっている. 蒸着膜を使用しても, (d) のように原則同じである. 外観は (e) のように様々であり, 外観からの判断は危険である.

フィルム材質にもよるが, 一般に損失 (誘電正接) は小さく, 直線性にも優れ, ノイズもセラミックと比較すると少ないため, 低周波計測回路に適している. 高周波特性も巻回方にもよるが, 比較的良好である. 大きな容量のものが作りにくいのが欠点である.

(c) 電解キャパシタ

キャパシタの片側の電極に電解質を用いたものを電解(質)キャパシタ (electrolytic capacitor) と呼ぶ. もう片側の電極には, アルミニウムの片面を酸化して酸化アルミニウム (Al_2O_3) にしたものをを用い, この Al_2O_3 層を誘電体として使用する. 図 1.11(a) に示したように, 電解質として電解液を電解紙にしみこませたものを使用することが多い. 固体電解質を用いる場合もある.

製造工程では, アルミニウム箔表面を電解エッチすることでポーラス状の凹凸が非常に激しく従って表面積が非常に大きな構造としながら同時に極めて薄い Al_2O_3 膜を形成する. 電解液含浸の電解紙を接触すると, このポーラス状表面の凹凸に電解液が浸透して誘電体が薄く巨大な面積のキャパシタが現れる. 反対側には自然酸化膜状態のアルミ箔を貼って絶縁膜と一緒に巻き込むことで大きな容量を持つキャパシタを作ることができる.

このように非対称な構造しているため極性が生じる. ポーラス酸化膜の耐圧内では持続的電流は流れないが, 外部電圧が変化すると電極内には過渡電流が流れる. 自然酸化膜側で酸素が発生する向きに電流が流れると, 酸化膜が厚くなって著しい性能劣化を起こしたり, 最悪の場合, 気体酸素圧力によってパッケージが破損し電解質が飛び散る事故が生じる. 図 1.11(c) で「安全弁」とあるのはこのような誤配線による圧力の逃しである.

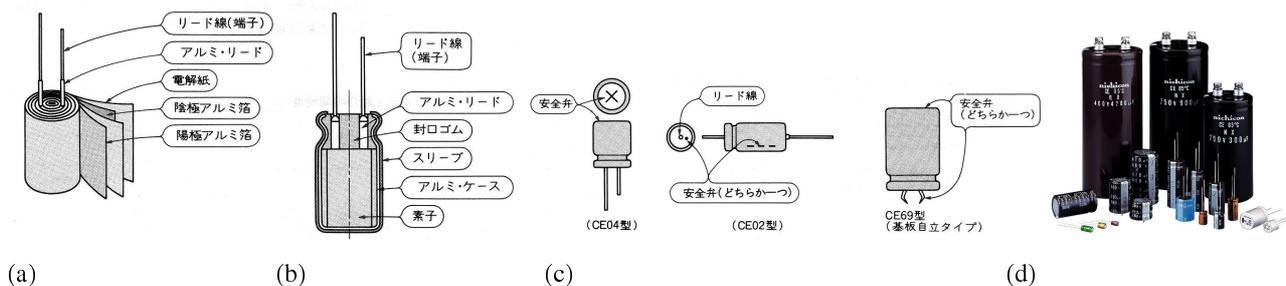


図 1.11 (a) 電解キャパシタの構造模式図 (b) パッケージ内部模式図 (c) パッケージ外観 (d) 様々な電解キャパシタ.

図 1.11(b)-(c) に示したように、何種類かのパッケージがあるが、類似性があり、(d) のように外観から電解キャパシタであることは比較的容易に判断できる。

(d) タンタル・キャパシタ

タンタル・キャパシタもアルミニウム電解キャパシタと類似のものであるが、温度特性、周波数特性が大幅に改善されている。

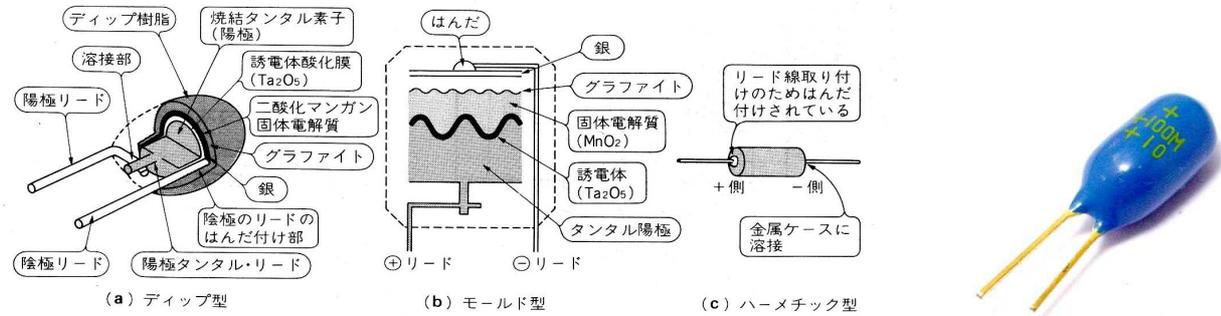


図 1.12 タンタル焼結体固体電解キャパシタの構造。

タンタル・キャパシタの工程の一例を挙げると、タンタル粉末を焼き固めて焼結体として有効大面積を作り、陽極酸化法により酸化物誘電体を形成する。これを硝酸マンガ液に浸して加熱することで固体二酸化マンガ層 (電解質) を形成する。これにグラファイトと銀ペーストで電極 (陰極) を形成する。

1.6.3 面実装用チップ型キャパシタ

以上述べてきた様々な固定キャパシタの殆どについて面実装用のチップ型のものが開発され、売りだされている。大量に安価に、かつ極めて小さく作製するため様々な技術が開発され、これも大変面白いものであるが、余りにも「トラ技」的知識に深入りするので、図 1.13 にそれらの一部の写真を掲載するに留める。興味がある方は、[6]などを参照して欲しい。

1.7 インダクタ

(1.7c) で L を有する素子の代表は、導線をらせん状に巻いたコイルである。積層キャパシタでは、金属板電極を楕円の歯状に多層にして入れ子にすることで面積を稼いでいたが、コイルは、やはり円環電流を縦方向に積層することで

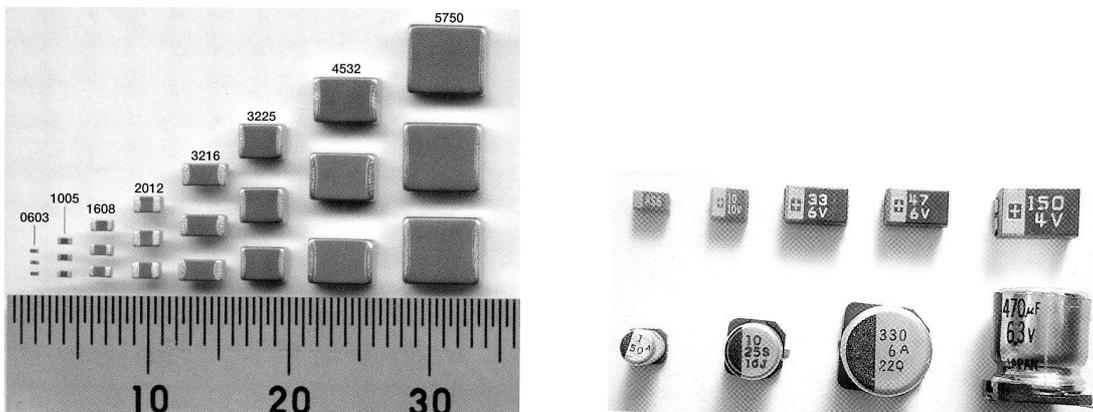


図 1.13 (a) チップ型積層セラミックキャパシタ (b) 上列：チップ型タンタル・キャパシタ。 下列：チップ型電解キャパシタ。

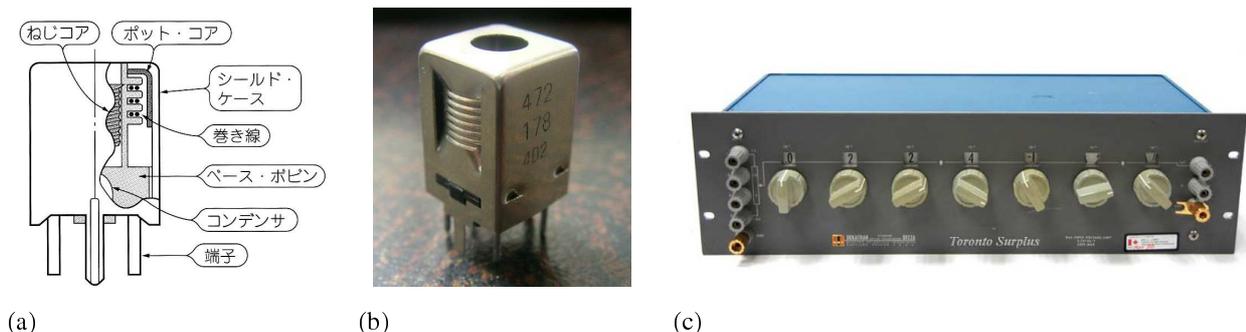


図 1.14 (a) 小型可変インダクタ構造の一例. (b) 外観写真. (c) ディケイドトランスと呼ばれる, ロータリースイッチによるコイル切替器.

実効面積を稼いでいると考えることができる. キャパシタは非常に遠方から見れば電気双極子と見こともできるが, この点からは, インダクタはやはり遠方から見て磁気双極子に見える素子と考えることもできる.

1.7.1 可変インダクタ

キャパシタの (1.9) に相当するコイルのインダクタンス L の表式は

$$L = \mu \frac{N^2}{l} S = \mu n N S \quad (1.10)$$

である. ここで, μ はコイル内物質の透磁率, N は巻き数, l はコイル長, S はコイル断面積, n は線密度である. 可変キャパシタでは主に S を変化させていたが, コイルではこれは難しい. 一つの方法は, コイル内に磁性体を出し入れして有効な μ を変化させることで可変インダクタとする. また, 抵抗器同様, ロータリースイッチでコイルを切り替えて高精度・広範囲の可変インダクタとするものもあるが, 抵抗器同様の問題がある.

図 1.14 はそのような例を示している. (a), (b) に示した小型のものでは, フェライトにネジが切られており, ケース上からドライバで回転することでフェライトをコイルに出し入れし, インダクタンスを変化させる. (c) はロータリースイッチでコイルを切り替える形式のもので, 7 桁の高精度を出すことができる. 調整とコイル巻きは職人の技術に頼っているので, 最近では高精度のものができなくなりつつある.

1.7.2 固定インダクタ

固定インダクタも, ほとんどは磁性体入りのコイルか, あるいは空芯のコイルである. かつては無線機器のサイズも大きく, トランジスタ回路であってもコイルはそれとわかるものが多かったが, 小型化してケースに入れられるようになり, 更に面実装用のチップインダクタになって他の部品と区別がつかないものも増えてきた. 面実装用のトランスも実用化されている.

特に高密度化によって重要になってきたのが, 図 1.15(a), (b) に示した開磁路, 閉磁路の違いである. 開磁路インダクタは, 磁性体で作ったドラムの周りに導線を巻きつけただけのもので, 発生磁束の外部漏洩, 外部磁束の捕獲が大きく, 回路内部のクロストークが問題になる. 閉磁路インダクタは, その外側に磁性体の円筒をかぶせた形状をしており, 形状も大きくなりコストも上がるが, 漏洩磁束は激減し, 高密度実装が可能になる. 通常小型固定インダクタは, 図 1.15(c) のように, コイル形状から円筒形をしていることが多い. 外側の円筒が磁気シールドになっている.

(d) のトロイダル (コア)・コイルは, 古くから電源回路などに使用されているが, 芯の磁性体, コイルが円環状になっていて, これも磁束漏洩がなく, 大きな電流が流れてもノイズを発生しにくい特徴がある.

これらの固定インダクタは, (e) - (g) に示したように様々な方法で面実装用のチップインダクタとして発売されている.

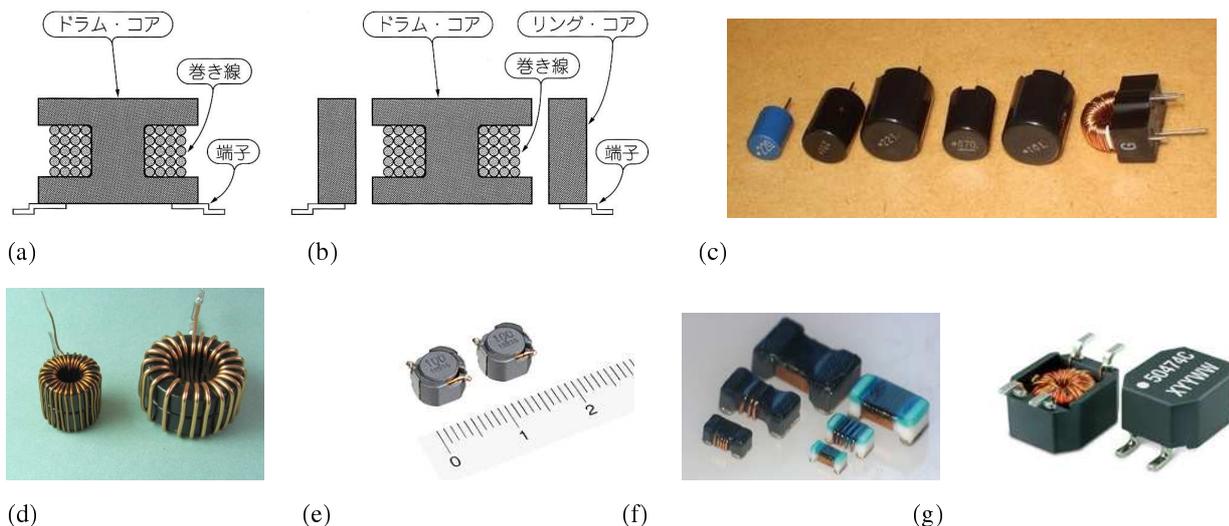


図 1.15 (a) 開磁路インダクタ. (b) 閉磁路インダクタ. (c) 様々なインダクタ. 一番右はトロイダル・コイル. (d) やや大型のトロイダル・コイル. (e) 開磁路チップインダクタ. (f) 開磁路チップインダクタ. (g) トロイダル・チップインダクタ.

第2章 線形回路序論

系を，入力 → 応答，という形で捉える際，応答が入力に比例する線形システムは人間にとって最も取り扱いやすいものである．非線形性の強い系であっても，様々な形で線形としてとりあつかう工夫がなされる．これまで用意した道具立てを使って，線形システムとみなせる電子回路を考え，線形システム一般論を眺めつつ電子回路の線形な取り扱いへと議論を進めていこう．

2.1 線形システムと電子回路

2.1.1 線形システムとは

任意定数 C_1, C_2 ，変数 x_1, x_2 に対して

$$f(C_1x_1 + C_2x_2) = C_1f(x_1) + C_2f(x_2) \quad (2.1)$$

が成立するとき，関数 f は線形であった．このように変数の1次結合を入力したとき，出力が各変数に対する出力の同じ1次結合で表されるときに入力 → 出力の関係を線形と呼ぶのであるから，**線形システム** (linear system) とは，図 2.1 のように入力が複数入力の1次結合で表されるとき，システムの応答 (出力) がそれぞれの入力への応答の同じ1次結合で表されるような系のことを呼ぶ．

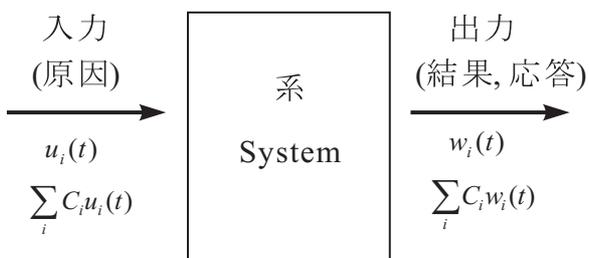


図 2.1 線形システムの概念図. $u_i(t)$ が時間 t に依存する入力, $w_i(t)$ がそれに対応する出力とする.

2.1.2 伝達関数

改めて、定義をしよう。多くの議論でそうであるように、ここでも時間 t を共通な 1 次元のパラメタとする。システムが、時間 t に依存する入力 $u(t)$ を受け取り、 $w(t)$ を出力する、とする。これを、汎関数（あるいは演算子） \mathcal{R} を使って

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} \quad (2.2)$$

と書く。 \mathcal{R} の性質として、物理系では次の 2 つが要請される。

不変性 システムの伝達特性が、時間によって変化しないこと。

$$\text{任意の時間 } t_1 \text{ に対して } w(t - t_1) = \mathcal{R}\{u(t - t_1)\} \quad (2.3)$$

因果性 原因 u が無い時には、結果 w も現れない。

$$u(t) = 0 \ (t < t_1) \rightarrow w(t) = 0 \ (t < t_1)$$

これらの前提の上で、次の**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つ場合、システムは線形である、という。任意の複素定数 C_1, C_2 に対して

$$\mathcal{R}\{C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)\} = C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t). \quad (2.4)$$

これを、任意数の和の形、

$$\mathcal{R}\left\{\sum_i C_i u_i(t)\right\} = \sum_i C_i w_i(t), \quad (2.5)$$

更に積分形（連続形）

$$\mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} c(q)u(q,t)dq\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(q)\mathcal{R}\{u(q,t)\}dq \quad (2.6)$$

へと拡張することは容易である。

ここで、連続変数 q を時間そのものにとってしまったらどうだろうか？すなわち、時間を δt の幅に区切って入力 $u(t)$ を各 δt 区間に対する関数の重ね合わせで表すとする。 $|t| \leq \delta t/2$ で 1、それ以外で 0 となる関数 $c(t)$ を考え、これを式で表し、 $\delta t \rightarrow 0$ として積分（連続）形で表すと、

$$u(t) = \sum_i u(t_i)c(t - t_i) \rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' u(t')c'(t - t')$$

となって、この c' は言わずと知れたデルタ関数 $c'(t - t') = \delta(t - t')$ である。積分形で表した時に高さが 1 でなく無限大の関数 c' になってしまったのは無論、 dt' がかかっているからである。式 (2.2) にこれを使い、更に (2.6) を用いると、

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} = \mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(t')\delta(t - t')dt'\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\mathcal{R}\{\delta(t - t')\}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t, t')dt'. \quad (2.7)$$

となる。ここで、 $\xi(t, t')$ は、入力がデルタ関数 $\delta(t - t')$ である時の応答

$$\xi(t, t') \equiv \mathcal{R}\{\delta(t - t')\} \quad (2.8)$$

であり、**インパルス応答** (impulse response) と呼ばれる。 $\xi(t, t')$ はまた、**重み関数** (weight function) とも呼ばれるが、その理由は式 (2.7) から明らかであろう。

$\delta(t)$ に対する応答を $\xi(t)$ と書くと、(2.3) より、 $\xi(t, t_1) = \xi(t - t_1)$ である。(2.7) より、

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t - t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t')\xi(t')dt' \quad (2.9)$$

となる。これはいわゆるたたみこみ (convolution) である。

ここまで、すべて時間軸上(時間領域)で話を進めてきたが、周波数空間で考えることもできる。この2つの空間における事象表現は、**フーリエ変換**(Fourier transform)で結ばれている。すなわち、時間領域での事象表現を $x(t)$ 、その周波数領域での表現を $X(\omega)$ とすると、

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.10)$$

である。関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}$ のように表し、 $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ 、 $W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$ 、 $\Xi(\omega) = \mathcal{F}\{\xi(t)\}$ とする。(2.9)の両辺のフーリエ変換を取ると、

$$W(\omega) = U(\omega)\Xi(\omega) \quad (2.11)$$

となる。この時、 $\Xi(\omega)$ をこのシステムの**伝達関数**(transfer function)という。

これはある意味では、一定周波数 ω の入力に対する出力の性質を調べたもの、と考えることができる。この時は無限の過去から未来へ一定周波数で振動する入力を考える必要があった。フーリエ変換と類似の積分変換にラプラス(Laplace)変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt \quad (2.12)$$

が存在する。無限の過去ないし未来を考えると、関数自身が発散して手に負えないため、適当なカットオフを入れる必要があるが、今の場合どこに入れても同じなので、扱いやすい $t = 0$ に入れたものである。そこで同様に、入力 $u(t)$ として $t < 0$ でゼロであるもののみを考える。すると、(2.9)のたたみこみは、

$$w(t) = \int_0^{\infty} u(t')\xi(t-t')dt' \quad (2.13)$$

と書くことができる。 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{x(t)\}$ のように表し、 $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$ 、 $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ 、 $\Xi(s) = \mathcal{L}\{\xi(t)\}$ とすると、(2.13)の両辺のラプラス変換を取って

$$W(s) = U(s)\Xi(s) \quad (2.14)$$

と、(2.11)と同型となる。この $\Xi(s)$ も伝達関数と呼ばれる。ラプラス変換は、フーリエ変換のような直交関数系展開係数の形をしていないので簡明な物理的意味付けができないが、インパルス入力に対して緩和(減衰)定数 s (時定数 s^{-1}) で緩和する線形系での入力出力の関係を示しているとも見られる。

更に、 s を複素平面へ拡張することを考え、 $s \rightarrow \sigma + i\omega$ とする。 $u(t)$ として $t \geq 0$ でのみゼロでないもの考えると、(2.14)の積分の下限を $-\infty$ に取っても発散することはなくなり、これを使うと、フーリエ変換(2.10)も同形式になるため、「伝達関数」の表式として(2.14)を共通に使用することができる。特に周波数応答が欲しい場合は、 $s = i\omega$ とすれば良い。以下、周波数応答であることを明示するためには、例えば $W(i\omega)$ のように書くことにする。

2.1.3 システムの電子回路表現とインピーダンス

式(1.7)を、 V_{12} を出力、 I_{12} を入力と考えて

$$w(t) = Ru(t), \quad w(t) = L \frac{du(t)}{dt}, \quad w(t) = \frac{1}{C} \int^t u(t') dt' \quad (2.15)$$

と書くことができる。すなわち、(1.7)の3つの受動素子は、このようなシステムの具体的な表現と考えることができる。これをこれらはこのようなシステムの**等価回路**(equivalent circuit)である、と表現することができる。

(2.15)の3つの演算子、 R 、 $L(d/dt)$ 、 $(1/C) \int^t dt'$ は、(2.3)、(2.4)を満たしているから、これらは線形システムである。従って s -空間において、応答関数が定義できる。周波数応答を考えることにして $s = i\omega$ についてそれぞれ計算すると、

$$\text{抵抗器} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} [R\delta(t)] dt = R, \quad (2.16a)$$

$$\text{インダクタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \left[L \frac{d}{dt} \delta(t) \right] dt = i\omega L, \quad (2.16b)$$

$$\text{キャパシタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{C} \int^t \delta(t') dt' \right] dt = \frac{1}{i\omega C}. \quad (2.16c)$$

(2.11) より,

$$W(i\omega) = RU(i\omega), \quad W(i\omega) = i\omega LU(i\omega), \quad W(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} U(i\omega) \quad (2.17)$$

である。電圧，電流の関係に戻り， $I(i\omega) = \mathcal{F}\{I_{12}(t)\}$ ， $V(i\omega) = \mathcal{F}\{V_{12}(t)\}$ とすると，

$$V(i\omega) = Z(i\omega)I(i\omega), \quad (2.18)$$

と，オーム則 (Ohm's law) 形式になる。ただし，

$$\text{抵抗器} : Z(i\omega) = R, \quad (2.19a)$$

$$\text{キャパシタ} : Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C}, \quad (2.19b)$$

$$\text{インダクタ} : Z(i\omega) = i\omega L \quad (2.19c)$$

である。 $Z(i\omega)$ を 2 端子素子の周波数 ω に対するインピダンス (impedance) と呼ぶ。インピダンスの逆数 $Y(i\omega) \equiv 1/Z(i\omega)$ をアドミタンス (admittance) と呼ぶ。

参考文献

- [1] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 2004).
- [2] N. W. Ashcroft and D. Mermin, *Solid State Physics* (Thomson Learning, 1976).
- [3] 霜田光一, 「エレクトロニクスの基礎」(裳華房, 1963).
- [4] 薊利明, 竹田俊夫, 「わかる電子部品の基礎と活用法」(CQ 出版社, 1996).
- [5] 「コンデンサ/抵抗/コイル活用入門—電子回路の性能を決める受動部品の基礎と応用」(トランジスタ技術 SPECIAL) (CQ 出版社, 2005).
- [6] 「抵抗&コンデンサ活用ノート」(トランジスタ技術 SPECIAL) (CQ 出版社, 2008).

物理屋のための電子回路論 第2回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年10月5日

2.1.2 伝達関数

改めて、定義をしよう。多くの議論でそうであるように、ここでも時間 t を共通な 1 次元のパラメタとする。システムが、時間 t に依存する入力 $u(t)$ を受け取り、 $w(t)$ を出力する、とする。これを、汎関数 (あるいは演算子) \mathcal{R} を使って

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} \quad (2.2)$$

と書く。 \mathcal{R} の性質として、物理系では次の 2 つが要請される。

不変性 システムの伝達特性が、時間によって変化しないこと。

$$\text{任意の時間 } t_1 \text{ に対して } w(t - t_1) = \mathcal{R}\{u(t - t_1)\} \quad (2.3)$$

因果性 原因 u が無い時には、結果 w も現れない。

$$u(t) = 0 \ (t < t_1) \rightarrow w(t) = 0 \ (t < t_1)$$

これらの前提の上で、次の**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つ場合、システムは線形である、という。任意の複素定数 C_1, C_2 に対して

$$\mathcal{R}\{C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t)\} = C_1 w_1(t) + C_2 w_2(t). \quad (2.4)$$

これを、任意数の和の形、

$$\mathcal{R}\left\{\sum_i C_i u_i(t)\right\} = \sum_i C_i w_i(t), \quad (2.5)$$

更に積分形 (連続形)

$$\mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} c(q)u(q,t)dq\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} c(q)\mathcal{R}\{u(q,t)\}dq \quad (2.6)$$

へと拡張することは容易である。

ここで、連続変数 q を時間そのものにとってしまったらどうだろうか？すなわち、時間を δt の幅に区切って入力 $u(t)$ を各 δt 区間に対する関数の重ね合わせで表すとする。 $|t| \leq \delta t/2$ で 1、それ以外で 0 となる関数 $c(t)$ を考え、これを式で表し、 $\delta t \rightarrow 0$ として積分 (連続) 形で表すと、

$$u(t) = \sum_i u(t_i)c(t - t_i) \rightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' u(t')c'(t - t')$$

となって、この c' は言わずと知れたデルタ関数 $c'(t - t') = \delta(t - t')$ である。積分形で表した時に高さが 1 でなく無限大の関数 c' になってしまったのは無論、 dt' がかかっているからである。式 (2.2) にこれを使い、更に (2.6) を用いると、

$$w(t) = \mathcal{R}\{u(t)\} = \mathcal{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u(t')\delta(t - t')dt'\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\mathcal{R}\{\delta(t - t')\}dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t, t')dt'. \quad (2.7)$$

となる。ここで、 $\xi(t, t')$ は、入力がデルタ関数 $\delta(t - t')$ である時の応答

$$\xi(t, t') \equiv \mathcal{R}\{\delta(t - t')\} \quad (2.8)$$

であり、インパルス応答 (impulse response) と呼ばれる。 $\xi(t, t')$ はまた、重み関数 (weight function) とも呼ばれるが、その理由は式 (2.7) から明らかであろう。

$\delta(t)$ に対する応答を $\xi(t)$ と書くと、(2.3) より、 $\xi(t, t_1) = \xi(t - t_1)$ である。(2.7) より、

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t')\xi(t - t')dt' = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - t')\xi(t')dt' \quad (2.9)$$

となる。これはいわゆるたたみこみ (convolution) である。

ここまで、すべて時間軸上 (時間領域) で話を進めてきたが、周波数空間で考えることもできる。この2つの空間における事象表現は、フーリエ変換 (Fourier transform) で結ばれている。すなわち、時間領域での事象表現を $x(t)$ 、その周波数領域での表現を $X(\omega)$ とすると、

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (2.10)$$

である。関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を $X(\omega) = \mathcal{F}\{x\}$ のように表し、 $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ 、 $W(\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$ 、 $\Xi(\omega) = \mathcal{F}\{\xi(t)\}$ とする。(2.9) の両辺のフーリエ変換を取ると、

$$W(\omega) = U(\omega)\Xi(\omega) \quad (2.11)$$

となる。この時、 $\Xi(\omega)$ をこのシステムの伝達関数 (transfer function) という。線形なので当然だが、(2.11) から異なる周波数間の結合 (モード間結合) がないことがわかる。

(2.11) は、一定周波数 ω の入力に対する出力の性質を調べたもの、と考えることができる。この時は無限の過去から未来へ一定周波数で振動する入力を考える必要があった。フーリエ変換と類似の積分変換にラプラス (Laplace) 変換

$$X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \quad (2.12)$$

が存在する。無限の過去ないし未来を考えると、関数自身が発散して手に負えないため、適当なカットオフを入れる必要があるが、今の場合どこに入れても同じなので、扱いやすい $t = 0$ に入れたものである。そこで同様に、入力 $u(t)$ として $t < 0$ でゼロであるもののみを考える。すると、(2.9) のたたみこみは、

$$w(t) = \int_0^{\infty} u(t')\xi(t - t')dt' \quad (2.13)$$

と書くことができる。 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}\{x(t)\}$ のように表し、 $W(s) = \mathcal{L}\{w(t)\}$ 、 $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ 、 $\Xi(s) = \mathcal{L}\{\xi(t)\}$ とすると、(2.13) の両辺のラプラス変換を取って

$$W(s) = U(s)\Xi(s) \quad (2.14)$$

と、(2.11) と同型となる。この $\Xi(s)$ も伝達関数と呼ばれる。ラプラス変換は、フーリエ変換のような直交関数系展開係数の形をしていないので簡明な物理的意味付けができないが、インパルス入力に対して緩和 (減衰) 定数 s (時定数 s^{-1}) で緩和する線形系での入力出力の関係を示しているとも見られる。

更に、 s を複素平面へ拡張することを考え、 $s \rightarrow \sigma + i\omega$ とする。 $u(t)$ として $t \geq 0$ でのみゼロでないもの考えると、(2.14) の積分の下限を $-\infty$ に取っても発散することはなくなり、これを使うと、フーリエ変換 (2.10) も同形式になるため、「伝達関数」の表式として (2.14) を共通に使用することができる。特に周波数応答が欲しい場合は、 $s = i\omega$ とすれば良い。以下、周波数応答であることを明示するためには、例えば $W(i\omega)$ のように書くことにする。

2.1.3 システムの電子回路表現とインピーダンス, アドミッタンス

式(1.7)を, V_{12} を出力, I_{12} を入力と考えて

$$w(t) = Ru(t), \quad w(t) = L \frac{du(t)}{dt}, \quad w(t) = \frac{1}{C} \int^t u(t') dt' \quad (2.15)$$

と書くことができる. すなわち, これら3つの受動素子は, このようなシステムの具体的な表現と考えることができる. これをこれらはこのようなシステムの**等価回路** (equivalent circuit) である, と表現することがある.

(2.15)の3つの演算子, R , $L(d/dt)$, $(1/C) \int^t dt'$ は, (2.3), (2.4)を満たしているから, これらは線形システムである. 従って s -空間において, 応答関数が定義できる. 周波数応答を考えることにして $s = i\omega$ についてそれぞれ計算すると,

$$\text{抵抗器} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} [R\delta(t)] dt = R, \quad (2.16a)$$

$$\text{インダクタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \left[L \frac{d}{dt} \delta(t) \right] dt = i\omega L, \quad (2.16b)$$

$$\text{キャパシタ} : \Xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left[\frac{1}{C} \int^t \delta(t') dt' \right] dt = \frac{1}{i\omega C}. \quad (2.16c)$$

(2.11)より,

$$W(i\omega) = RU(i\omega), \quad W(i\omega) = i\omega LU(i\omega), \quad W(i\omega) = \frac{1}{i\omega C} U(i\omega) \quad (2.17)$$

である. 電圧, 電流の関係に戻り, $\mathcal{J}(i\omega) = \mathcal{F}\{J_{12}(t)\}$, $\mathcal{V}(i\omega) = \mathcal{F}\{V_{12}(t)\}$ とすると,

$$\mathcal{V}(i\omega) = Z(i\omega)\mathcal{J}(i\omega), \quad (2.18)$$

と, オーム則 (Ohm's law) 形式になる. ただし,

$$\text{抵抗器} : Z(i\omega) = R, \quad (2.19a)$$

$$\text{キャパシタ} : Z(i\omega) = \frac{1}{i\omega C}, \quad (2.19b)$$

$$\text{インダクタ} : Z(i\omega) = i\omega L \quad (2.19c)$$

である. $Z(i\omega)$ を2端子素子の周波数 ω に対する**インピーダンス** (impedance) と呼ぶ. (2.19)では Z はそれぞれ実数または純虚数だが, 一般的表式(2.18)からもわかるように一般の複素数を取り得る.

インピーダンスの逆数 $Y(i\omega) \equiv 1/Z(i\omega)$ を**アドミッタンス** (admittance) と呼ぶ.

$$\mathcal{J}(i\omega) = Y(i\omega)\mathcal{V}(i\omega), \quad (2.20)$$

であるから, (2.18)を, 電流を入力, 電圧を出力とする線形システムの伝達関数がインピーダンス Z であることを表しているとするならば, (2.20)は電圧入力, 電流出力の系の伝達関数がアドミッタンス Y であることを表している*1.

2.2 電源

2端子素子の中でも, やや特殊な「電源」を導入しよう. 「端子」は回路系に境界条件を与えるものとして導入した. 単純な境界条件として, 2端子間に一定の電圧を加える, 一定の電流を流す, というものが考えられる. これらの境界条件付与機能に着目し, 機能ごと素子としてしまったものが電源である. 外部境界条件を回路の内部に取り込むことに相当する.

*1 蛇足だが, このように微分方程式を解き直さなくても除算で済んでしまうのが, Heaviside (1850–1925) を始祖とする演算子法 (operational calculus) の利点である.

2.2.1 電圧源と電流源

(2.18) は、物理的には一定振幅の周波数 ω の電流 (電圧) を素子に加えた時、一定振幅の電圧 (電流) が発生する (流れる) ことを示している。「一定振幅、周波数 ω で振動する電流 (電圧) を素子に加える」のは、系の運動方程式の境界条件として与えられるものであるが、これを回路図という言葉で表現したものが、**電源** (electric power source) あるいは**起電力** (electromotive force) と呼ばれる素子である。

キャパシタなどの場合と同様、理想的な電源 (ideal power source) を考え、これに非理想的な要因を回路素子として付け加えて現実の電源をシミュレートする。理想的電源の代表が、 $\omega = 0$ に相当する直流電圧源、電流源である。

理想直流電圧源は、どのような回路 (電源側から見た供給対象回路のことを、**負荷** (load) を接続しても一定電圧を保つ素子であり、現実の素子では電池がこれに近いものである。この、電池という素子から容易に思いつくように、これまで見てきた受動素子で直流電圧源を表現するとすれば、図 2.2(a) のように、1つのキャパシタで表される。ただし、

$$Q \rightarrow \infty, \quad C \rightarrow \infty, \quad V = \frac{Q}{C} = \text{const.}$$

のような極限操作を行ったものと考えることができる。回路記号的には、右のように電池として表される。

同様に、直流定電流源は図 2.2(b) のように、定電圧源に直列に抵抗器を挿入し、

$$V \rightarrow \infty, \quad R \rightarrow \infty, \quad J = \frac{V}{R} = \text{const.}$$

という極限操作を行ったものと考えられる。記号としては右に示したように、円に矢印で電流方向を示したものや、円を2つずらせて重ねたものが使用される。「円に矢印」記号は、交流定電流源の記号にも使用され、その性質は注釈等により規定する。

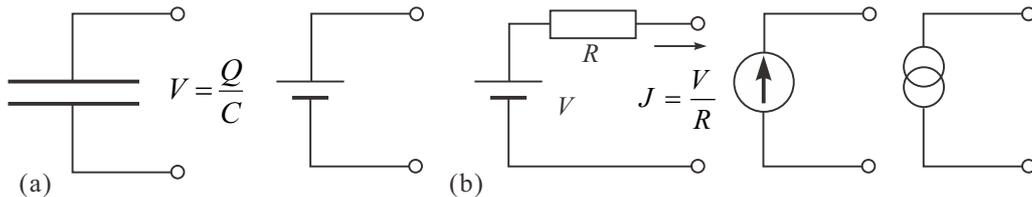
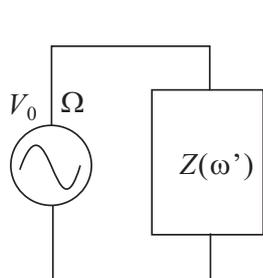


図 2.2 (a) 直流電圧源の等価回路, (b) 直流電流源の等価回路 (いずれも極限操作に関しては、本文参照).

2.2.2 消費電力・交流電源

電圧降下 V があるところに電流 J が流れていけば、単位時間当たり $P = VJ$ のエネルギーがこの回路中から失われる (**エネルギー散逸** (energy dissipation)). これが抵抗器 $R = V/J$ によるものであれば、単位時間当たりエネルギー散逸は $P = V^2/R = J^2R$ となり、多くの場合これはジュール熱 (Joule heat) となって外界に放出される。これを抵抗器の**消費電力** (electric power consumption) と呼ぶ。逆に、電圧 V 、電流 J を供給する電源素子は、単位時間当たり $P = VJ$ のエネルギー湧き出しと考えることができる。



直流定電圧電源を再び周波数が有限値 ω' の場合に拡張し、更に複素数表示を使って $V_{12}(\omega', t) = V_0 e^{i\omega' t}$ としてみる。回路図では、交流電源を丸に波模様の記号で表す。左の図は、このような交流電源がインピーダンス $Z(i\omega)$ の2端子素子に接続されていることを示す回路図である。 $\mathcal{V}(i\omega) = \mathcal{F}\{V_{12}\} = 2\pi V_0 \delta(\omega - \omega')$ より、電流のフーリエ成分は、 $\mathcal{J}(i\omega) = 2\pi V_0 \delta(\omega - \omega')/Z(i\omega)$ となる。電流は、

$$J_{12}(\omega', t) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V_0}{Z(i\omega)} \delta(\omega - \omega') e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{V_0}{Z(i\omega')} e^{i\omega' t} = \frac{V_{12}(\omega', t)}{Z(i\omega')}$$

と、当然ながら周波数を ω' に限り、オーム則を適用すれば良い。

この時、 $Z(i\omega)$ で表される素子での消費電力を考えよう。簡単のため実数表示で考えることとし、 $V_{12} = V_0(e^{i\omega't} + e^{-i\omega't})/2 = V_0 \cos \omega't$ とする。

$$W(\omega', t) = V(\omega', t)J(\omega', t) = V_0^2 \cos^2 \omega't / Z(\omega') \quad (2.21)$$

は一般に複素数であり、また t に依存するため**複素瞬時電力** (complex instantaneous power) と呼ばれている。今の場合、周波数 $2\omega'$ の周期関数であるから、一周期で時間平均すると、

$$W(\omega') = \frac{V_0^2}{2Z(\omega')} \quad (2.22)$$

となる (混乱はないと思うので、時間平均に対しても同じ記号を使用する)。これを複素電力、その実部 $P(\omega') \equiv \text{Re}[W(\omega')]$ を**有効電力** (effective power)、虚部 $Q(\omega') \equiv \text{Im}[W(\omega')]$ を**無効電力** (reactive power)、複素電力の振幅 $|W(\omega')|$ を**皮相電力** (apparent power) とそれぞれ呼ぶ*2。インピーダンスによってエネルギーとして消費されこの系から散逸されるのは、有効電力であり、無効電力は電源と素子との間のエネルギー循環を表している。また、皮相電力に対する有効電力の比

$$I_M \equiv \frac{\text{Re}[W(\omega')]}{|W(\omega')|} = \cos [\arg(W(\omega'))] \equiv \cos \phi \quad (2.23)$$

を**力率** (moment) と呼ぶ。 ϕ は、 $W(\omega')$ の位相角であり、今の場合 $1/Z(\omega') = Y(\omega')$ の位相角である。すなわち、電圧 V と電流 J との位相のずれである。

複素電力が (2.21) のように単純な積で書けたのは、交流電圧を実数表現としたからであるが、複素電力振幅に対する有効電力の比が (2.23) のように、電流電圧の位相のずれ ϕ に対して $\cos \phi$ (無効電力の比は $\sin \phi$) と書けるというのは一般的な結果である。そこで、電圧が一般の複素数表示されていたとして、 $V(\omega') = |V(\omega')|e^{i\theta}$ 、 $J(\omega') = |J(\omega')|e^{i(\theta+\phi)}$ とすると、 $W(\omega') = |W(\omega')|e^{i\phi}$ である。これを一般的に簡潔に表すやり方として

$$W(\omega') = V^*(\omega')J(\omega') \quad (2.24)$$

と、 V の複素共役を取るものが良く使用される。

インピーダンスとして $Z(\omega) = R$ という純粋な抵抗器を考えると、(2.22) より $W = P = V_0^2/2R$ である。これは、電圧 $V_0/\sqrt{2}$ とした時の直流電力の表式に相当する。このように、交流電圧を時間平均した時の直流電圧に相当する値を**実効値** (effective value) と呼ぶ。日本の電灯線の 100V などはこの実効値を示しており、従って、交流振幅はその $\sqrt{2}$ 倍だけある。

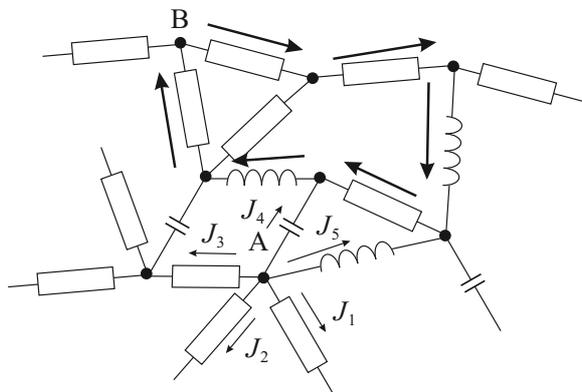


図 2.3 2 端子素子回路網の例

2.3 回路網

2 端子の素子を様々につないでできる回路を考えていくことになるが、ここで、集中定数回路についてごく一般的に成立する簡単で基礎的な定理を見ておくことにしよう。

2.3.1 キルヒホッフの法則

周波数空間において定義したインピーダンスについて、通常の抵抗器接続則と同様に扱うことができる。無論、周波数空間で (2.18) のようにオーム則形に書かれているためである。これら 2 端子素子を導線で結合した際に、電位の一価性と電荷保存則を、電子回路では**キルヒホッフの法則** (Kirchhoff's law) という。図 2.3 の A、B 点のように、複

*2 「無効」や「皮相」とは妙な訳語だが業界用語なので仕方ない。

数の導線が結合している点を結節点と呼ぶ。任意の結節点から流れ出す電流を、 J_i とする。流れ込む電流は負の値で表す。すると、結節点上の電荷保存則より

$$\sum_i J_i = 0 \quad (2.25)$$

である (図では A 点で $J_1 \sim J_5$ で表示)。これはもちろん、電磁気学での連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{J} = 0$$

で、湧き出し/吸い込みがない場合 ($\partial \rho / \partial t = 0$) について、回路網であることからハード的に離散化されたものである。

また、各素子に番号をつけ、番号 j の素子に印加されている電圧 (電圧降下) を V_j と書き、図に示したように B 点を出発して矢印のように一周して B 点に戻る経路上でこれらを加えたとすると、電位の空間一価性より

$$\sum_j V_j = 0 \quad (2.26)$$

でなければならない。電子回路論では、(2.25), (2.26) をそれぞれキルヒホッフの第 1 法則、第 2 法則 (あるいは、電流則、電圧則) と呼ぶ。

2.3.2 インピーダンスの合成

キルヒホッフの法則より、アドミッタンス (インピーダンス) Y_1, Y_2, \dots, Y_n (Z_1, Z_2, \dots, Z_n) の 2 端子素子を並列に並べた場合、その合成アドミッタンス Y_{tot} (合成インピーダンス Z_{tot}) は

$$Y_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad Z_{\text{tot}} = \left(\sum_{i=1}^n Z_i^{-1} \right)^{-1} \quad (2.27)$$

となるのがわかる。同様に、直列接続の場合は

$$Y_{\text{tot}} = \left(\sum_{i=1}^n Y_i^{-1} \right)^{-1}, \quad Z_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^n Z_i \quad (2.28)$$

となる。

簡単な例として、右図のように容量 C のキャパシタに抵抗値 R の抵抗が並列接続されているものを考える。現実の単体キャパシタのモデルとも考えることができる。図のように周波数 ω 、振幅 V_0 の交流電源に接続されているとする。合成インピーダンス、アドミッタンスは、

$$Z(i\omega) = \left(\frac{1}{R} + i\omega C \right)^{-1}, \quad Y(i\omega) = \frac{1}{R} + i\omega C \quad (2.29)$$

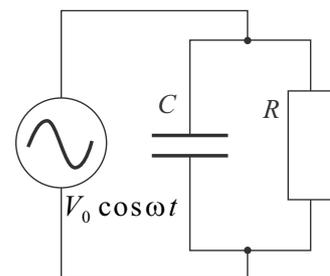
である。これより、有効電力、無効電力はそれぞれ、

$$P(\omega) = \frac{V_0^2}{R} \cos^2 \omega t, \quad Q(\omega) = \omega C V_0^2 \cos^2 \omega t \quad (2.30)$$

となる。ここで、循環するエネルギーに対してエネルギーが散逸される割合

$$\frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \frac{1}{\omega C R} = \tan \delta \quad (2.31)$$

を誘電正接 (dissipation factor), $\delta = \arg W - \pi/2$ を損失角 (loss angle) と呼ぶ。これは、キャパシタの性能を表す重要なパラメーターである。



2.3.3 重ね合わせの定理

線分とそれらの結節点の集合をこれらのトポロジカルな関係に抽象化して議論するのが、グラフ理論と呼ばれるものであり、集中定数回路概念は電子回路をグラフ理論的に扱うための抽象化であると捉えることもできる。すなわち、金属で接続された等電位点を節 (node)、2端子素子を枝 (branch) とする。ここでは枝の向きも考慮する有向グラフ (directed graph, digraph) を考える。

回路網が、起電力と線形な素子のみで出来上がっている場合は、すべての節と閉回路を考えてキルヒホッフの法則を適用して連立一次方程式が得られ、すべての枝を流れる電流を計算することができる。今、すべての枝を起電力 E_i ($i = 1 \dots m$) と抵抗 R_i により構成されるとする (単なる直結の場合は $E_i = R_i = 0$)。すると、第2法則から、

$$A\{(\mathbf{R})\} \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_m \end{pmatrix} \quad A \text{ は } \mathbf{R} \text{ の 1 次 の 行 列} \quad (2.32)$$

である。電流分布 \mathbf{J} は $A^{-1}\mathbf{V}$ から得られることになる。この線形性より次の定理が容易に得られる。

重ねあわせの定理

回路網中に多くの起電力が存在する時の電流は、各起電力が単独に存在する時の電流分布を重ね合わせたものに等しい。

2.3.4 鳳-テブナンの定理

鳳-テブナンの定理は次のようにまとめることができる。

鳳-テブナンの定理

電流の流れている回路網内の任意の2点を、新たに抵抗 R でつなぐ。つなぐ前の2点間の電圧を V_0 、回路内の起電力をすべて短絡して2点間の抵抗を測定した時の値を R_0 とすると

$$J = V_0 / (R + R_0) \quad (2.33)$$

となる。これは、起電力 V_0 、内部抵抗 R_0 の電源に負荷抵抗 R をつないだ時の電流である。

これは、重ねあわせの定理より次のように簡単に証明される。問題の2点間を R と起電力 V_0 でつなぐ (図 2.4) と R の両端の電圧は零であり、電流は流れない。この状態で、この V_0 以外の回路網中の起電力をすべて零にすると、 V_0 に対して R と R_0 の直列回路がつながっていることになるので、流れる電流 J_0 は $-V_0 / (R + R_0)$ である。重ねあわせの定理より、最初の「電流が流れない」条件は $J + J_0 = 0$ であることから、(2.33) が得られる。

鳳-テブナンの定理は、実際に電気回路を相手にして回路図等の詳細な情報が与えられていない時に必要な情報を実験的に得る際などに適用され、応用性の高い定理である。

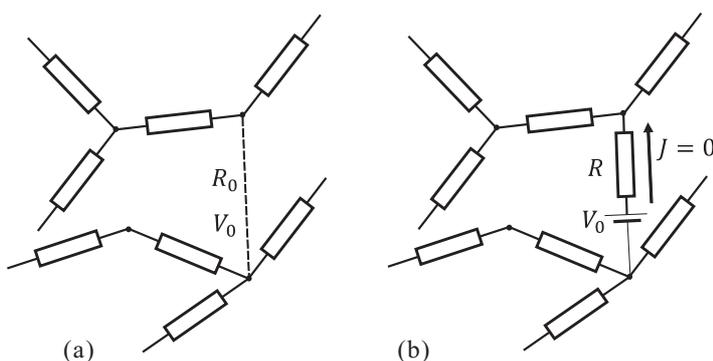


図 2.4 鳳-テブナンの定理の証明

2.3.5 テレヘンの定理

有向グラフの節、枝にそれぞれ指数 $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ を付け、

$$a_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{節 } i \text{ が枝 } j \text{ の始点,} \\ -1: & \text{節 } i \text{ が枝 } j \text{ の終点,} \\ 0: & \text{節 } i \text{ は枝 } j \text{ の端点でない} \end{cases} \quad (2.34)$$

とする $n \times m$ 行列 $\{a_{ij}\}$ を考える。これを**接続行列** (incidence matrix) という。

すべての j について枝 j は2つの端点を持ちこれらの a_{ij} の和はゼロ、その他の要素はゼロである。すなわち、

$$\forall j: \sum_{i=1}^n a_{ij} = 0$$

であって、これより接続行列のうち1つの行は消去しても行列の有する情報は変化しない。これは、節のうちどれを接地電位に取るかという任意性が残っていることに相当する。そこで適当に1行を消去した $(n-1) \times m$ 行列 \mathcal{D} を考え、既約接続行列 (irreducible incidence matrix) と呼ぶ。なお、回路が途中で切断されていない連結グラフについて考えている。

\mathcal{D} と (2.32) で導入した各枝を流れる電流 J_j (枝の「向き」を正に取る。その他の物理量についても同じ) を並べたベクトル \mathbf{J} を用いて、キルヒホッフの第1法則は

$$\mathcal{D}\mathbf{J} = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

と表現することができる。更に、各節の電位 W_i を並べたベクトルを \mathbf{W} 、各枝にかかる電圧 V_j を並べたベクトル \mathbf{V} を導入する。枝 j の両端点節のインデックスが i, k で、 $i \xrightarrow{j} k$ の関係にあるとすると、 $V_j = W_i - W_k = a_{ij}W_i - a_{kj}W_k$ であるから、

$$\mathbf{V} = {}^t\mathcal{D}\mathbf{W} \quad ({}^t\mathcal{D} \text{ は } \mathcal{D} \text{ の転置行列}) \quad (2.36)$$

である。これは、各節の電位が一つの値に定まる、ということで、キルヒホッフの第2法則を表している。

従って

$$\sum_{i=1}^m V_i J_i = ({}^t\mathcal{D}\mathbf{W}) \cdot \mathbf{J} = {}^t\mathbf{W}\mathcal{D}\mathbf{J} = 0 \quad (2.37)$$

である。すなわち、電圧ベクトルと電流ベクトルとは直交している。これが**テレヘンの定理** (Tellegen's theorem) と呼ばれるものである。

(2.37) は、ある回路のある瞬間の \mathbf{V} と \mathbf{J} に関するものであるとするならば、回路全体としてエネルギーの変化がないことを表しているが、それは、電荷保存と電場の一価性すなわちキルヒホッフの法則に基づくものである。枝のトポロジカルな結合関係を表す行列 \mathcal{D} と \mathbf{V} , \mathbf{J} との関係 (2.35) および (2.36) のみから導かれており、これら2つの関係式は、 \mathcal{D} が同じ回路であれば、物理的に異なるものであっても成立するから、(2.37) も成立する。線形性も仮定されていない。

テレヘンの定理

ある回路の電圧ベクトルと、これと同じトポロジカルな接続関係を持つ回路の電流ベクトルとは直交している。

2.4 4端子(2端子対)回路

これまで2端子の素子を単位として線形回路を議論してきた。金属を用いた電気信号の伝播には、例えば信号ラインと接地ラインなど何らかの意味で2つの金属が必要となる。これらに2つの端子を対応させ、**端子対** (terminal pair) として扱うことが良く行われる。端子対には同じ大きさで逆向きの電流が流れる、という境界条件を課す。これまで扱ってきた2端子素子、これらを組み合わせた2端子回路は1端子対回路と見ることができる。

そこで、端子対を1つ増やして2端子対回路 (two-terminal pair circuits) を考えよう。全部の端子数は4であるため、4端子回路と呼ばれることも多い。4つの端子を出した回路とは、対をなす端子間の電流に特別な境界条件が課された形になっている。これは、入力 → 出力の最小ブロックであり、更に回路の構成ブロックとすることが良く行われる。

2.4.1 4端子回路の定義

4端子回路を図2.5のように回路をブラックボックス化して表す。

4端子回路パラメタの取り方として、出力端子の J_{out} , V_{out} を使って入力端子の電流電圧 J_{in} , V_{in} を表す、というものがある。4端子回路はすべて線形素子で構成されているとする。線形性より、 J , V 等はすべて ω 空間 (あるいは s 空間) 要素 $\mathcal{J}(i\omega)$, $\mathcal{V}(i\omega)$ と置きかえても良い。4端子回路は、インピーダンス (アドミッタンス) のネットワークと見ることができ、直流抵抗回路網と同様の合成解析ができる。端子対の仮定から、電流は対をなす端子間で還流する境界条件を与える。この時、回路の線形性より

$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} \equiv F \begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

と表すことができるはずである。この F は **4端子行列** と呼ばれるものの一種で、特に F 行列あるいはカスケード行列と呼ばれる。 A, B, C, D を4端子定数、あるいは F パラメタと呼ぶ。(2.38) はまた、次のように書くこともできる。

$$A = \left(\frac{V_{in}}{V_{out}} \right)_{J_{out}=0}, \quad B = \left(\frac{V_{in}}{J_{out}} \right)_{V_{out}=0}, \quad C = \left(\frac{J_{in}}{V_{out}} \right)_{J_{out}=0}, \quad D = \left(\frac{J_{in}}{J_{out}} \right)_{V_{out}=0}. \quad (2.39)$$

入力と出力を交替して、

$$\begin{pmatrix} V_{out} \\ J_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} \equiv K \begin{pmatrix} V_{in} \\ J_{in} \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

という書き方も可能である (K 行列)。

F 行列は入力と出力をつないでいるものの、因果律を表しているわけではない。また、状況により回路の記述に便利なパラメタは変化する。以下に、そのような様々なパラメタに対応する行列を示す。ただし、対称性のため、 J_{out} の向きを図2.5(b)のように F 行列とは反対にとる。

$$\begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} \equiv Z \begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\begin{pmatrix} J_{in} \\ J_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} \equiv Y \begin{pmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Z をインピーダンス行列、 Y をアドミッタンス行列と呼ぶ。この他にもハイブリッド (h) 行列、散乱 (S) 行列など、良く使われるパラメタ行列がある。これらは、それぞれ、トランジスタ、高周波回路の項で改めて説明する。

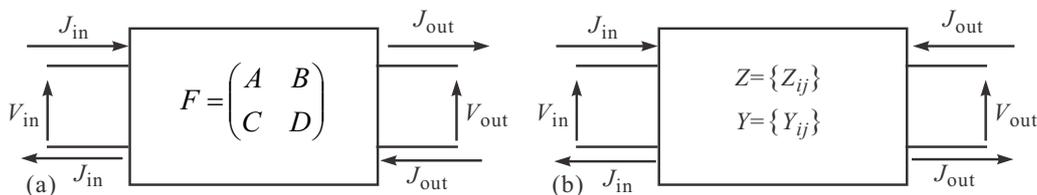


図2.5 (a)4端子回路の概念図。F行列に使う外部パラメタ。(b)インピーダンス行列、アドミッタンス行列のためには、外部電流の向きを対称に取る。

	A	B	C	D
直列素子	1	Z	0	1
並列素子	1	0	$\frac{1}{Z}$	1
T型	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$	$\frac{1}{Z_2}$	$1 + \frac{Z_3}{Z_2}$
π 型	$1 + \frac{Z_1}{Z_3}$	Z_1	$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_2 Z_3}$	$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$

表 2.1 2 端子素子を接続して作った 4 端子回路と F 行列

2.4.2 4 端子回路の接続

図 2.6(a) のように 4 端子回路の出力を次の入力として次々と繋いでゆくことをカスケード接続と呼んでいる．全体の F 行列は簡単に

$$F_{\text{tot}} = \prod_{i=1}^N F_i \quad (2.43)$$

となる．F 行列をカスケード行列と呼ぶ所以である．一方，2 端子回路の直列接続に相当するのは，電圧が加算されるような接続法であるから，図 2.6(b) のようになる．この時はインピーダンス行列を使うのが便利で合成回路のインピーダンス行列は $Z = Z_1 + Z_2$ と和で表される．同様に並列接続図 2.6(c) では，合成回路のアドミッタンス行列は $Y = Y_1 + Y_2$ となる．表 2.1 に 2 端子素子を接続して色々な 4 端子回路を形成した場合の F 行列についてまとめた．このような受動素子による 4 端子回路で，物理実験で良く使われるのが，フィルター回路である．例えば，T 型の回路で， Z_1, Z_3 にインダクタ， Z_2 にキャパシタを使えば，T 型ローパスフィルターとなる．

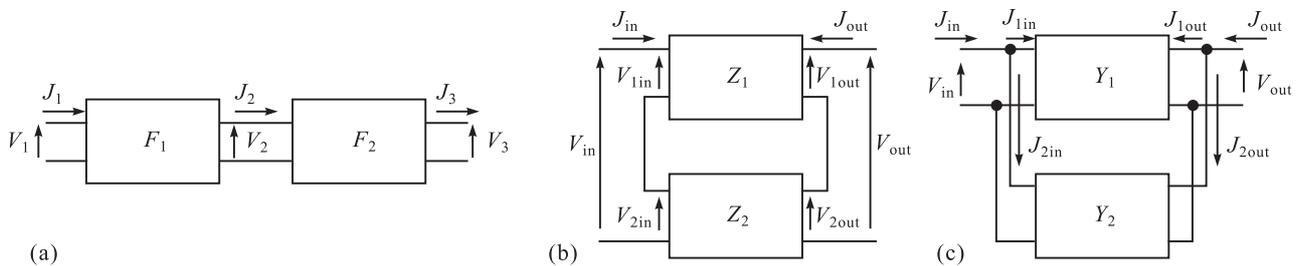


図 2.6 (a) 4 端子回路のカスケード接続. (b) 直列接続. (c) 並列接続

2.5 端子対回路の諸定理

「回路網」の項でいくつかの回路定理を紹介した。これらは、端子対回路という制約の下でも当然成立する。また、端子対回路特有の定理も存在する。

重ね合わせの定理

図 2.7(a) に示すように (この例は、4 端子回路ではなく 6 端子回路であるが)、電圧、または電流を決めている境界条件が複数あり、別の端子対に負荷を接続した場合、負荷に流れる電流は、それぞれの電源の「出力値」をゼロにした時の値の和となる。

鳳-テブナンの定理

6 端子回路で見ると、図 2.7(b) のようになる。すなわち、6 端子回路に電源が 2 つ、インピーダンス Z が接続されている時、 Z に流れる電流 J は、 Z を開放した時に生じる電圧を V_o 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピーダンスを Z_i とし、 $J = V_o / (Z + Z_i)$ と書くことができる。

ノートの定理

鳳-テブナンの定理のアドミッタンス版。図 2.8 のように、鳳-テブナンでインピーダンスと見たところをアドミッタンス Y と考え、 Y の両端に現れる電圧 V を求める。まず、 Y を短絡して流れる電流 J_s を測定する。次に、 Y を開放して電源の出力をいずれもゼロとし、出力側から測定したアドミッタンスを Y_i とすると、

$$V = \frac{J_s}{Y + Y_i} \quad (2.44)$$

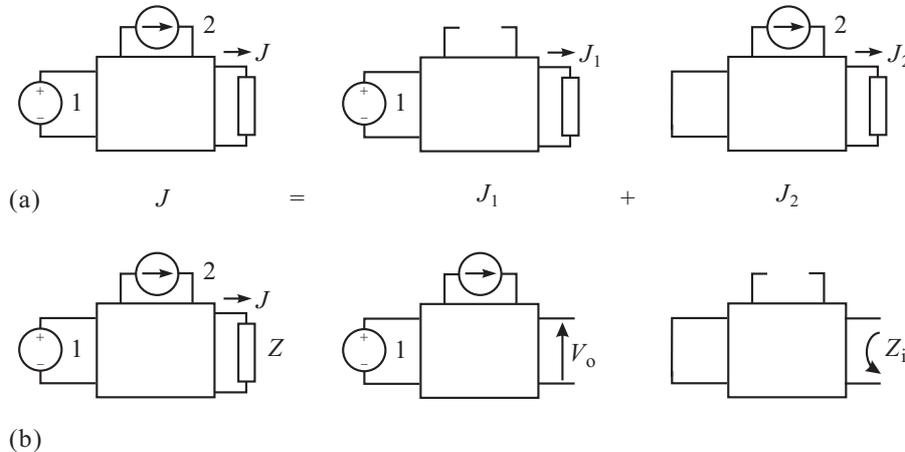


図 2.7 (a) 重ね合わせの定理. 左辺の回路で右の抵抗器を流れる電流 J は、右辺第 1 項、定電流電源をオープンにした場合に流れる電流 J_1 と、第 2 項、定電圧電源をショートした時に流れる電流 J_2 との和である。(b) 鳳-テブナンの定理. インピーダンス Z に流れる電流 J は、 Z を開放した時に生じる電圧を V_o 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したインピーダンスを Z_i として、 $J = V_o / (Z + Z_i)$ 。

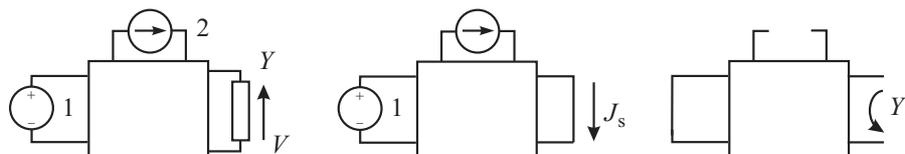


図 2.8 ノートの定理. アドミッタンス Y に生じる電圧 V は、 Y を短絡した時に流れる電流を J_s 、電源の出力をいずれもゼロにした時に出力側から測定したアドミッタンスを Y_i として、 $V = J_s / (Y + Y_i)$ 。

である。

補償の定理

これも鳳-テブナンの定理の言い換えである。やはり、電源がつながった回路の中のインピーダンス Z を考える。左図の状態で電流 J が流れていたとする。インピーダンスが ΔZ だけ変化し、中央図のように、これを補償する電源 ΔV をつないで、 J が変化しないように調整する。 $\Delta V = J\Delta Z$ である。次に右図のように電源の出力を例によってゼロにし、更に上記補償電源の向きを逆転する。この時、各導線に流れる電流 ΔJ_i は変化 ΔZ による電流変化を抽出したものである。

これは、中央の図と右の図を「重ね合わせ」で見れば明らかである。

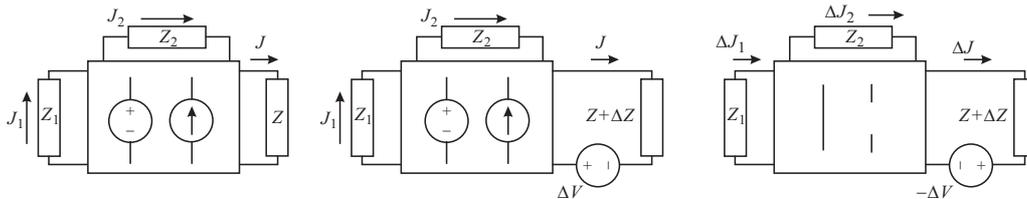


図 2.9 補償の定理. 本文参照.

相反定理

4端子回路における相反定理は物理的には様々な表現ができる。以下、2種類紹介する。ここでは例によって直流の線形素子(起電力, 抵抗)による回路網に話を限るが、交流の場合もキルヒホッフの法則同様、複素数への拡張によって同様な定理が成立する。4端子回路, 相反定理をめぐる, 様々な物理の結びつきが [1] に紹介されている。

相反定理 (コンダクタンス): 4端子回路の入力, 出力は便宜的な区別に過ぎないので, これを a, b と称する。a に起電力 V をつなぎ, b を短絡した時に, b に流れる電流は, 逆に b に V をつないで a を短絡した時に a に流れる電流に等しい。これは, アドミッタンス (今の場合コンダクタンス) 行列で $Y_{12} = Y_{21}$ となっていることを示している。

相反定理 2(抵抗): a に定電流源 J をつなぎ, b を開放した時に, b に発生する電圧は, 逆に b に J をつないで a を開放した時に a に発生する電圧に等しい。これは, インピーダンス (今の場合抵抗) 行列で $Z_{21} = Z_{12}$ となっていることを示している。

以上から, 相反定理が成り立つ場合には, F, Z, Y の各行列の要素間に

$$Z_{11} = \frac{A}{C}, \quad Z_{22} = \frac{D}{C}, \quad Z_{12} = Z_{21} = \frac{1}{C} \quad (2.45)$$

$$Y_{11} = \frac{D}{B}, \quad Y_{22} = \frac{A}{B}, \quad Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{B} \quad (2.46)$$

という関係が成立する。また, これより

$$|F| = AD - BC = 1 \quad (2.47)$$

であることもわかる。

2.6 双対性

これまで調べてきた回路の性質に現れた**双対性** (duality) について見ておこう。これは, インピーダンスとアドミッタンスのようにある種の対立概念がある時, 対立概念のセットを入れ替え, 場合によっては概念間の論理関係も入れ替えるなどの操作(双対変換 duality transformation)を行うことで, 対応定理が成立するとき, 2組の概念セットの間に双対性がある, というものである。これら概念セットのことを双対空間 (dual space) と呼ぶことがある。2つの空間の間に双対性があれば, 一方の空間で成立する様々な定理・性質は双対変換によって双対空間でも成立することになる。

直列接続	並列接続
開放	短絡
電場	磁場
キルヒホッフの第 2 法則	キルヒホッフの第 1 法則
電圧	電流
インピーダンス	アドミッタンス
抵抗	コンダクタンス
静電容量	インダクタンス
鳳-テブナンの定理	ノートンの定理

表 2.2 電子回路基礎概念間の双対性の例.

表 2.2 に、これまでに現れた電子回路に関する双対関係にある基礎概念の例を示した。前回の講義でメタな関係を共有する物理系間の平行論 (parallelism) について簡単に述べたが、平行論においては関係する系の間に直接の物理的な関係はなかったのに対し、双対関係は一般に密接な物理関係を有する点が大きな違いである。多くは双対変換が逆数や積分の逆変換となるなど、対極的な関係にある。

付録 A：物理実験のための「電源」の雑知識

物理実験で電源の知識は欠かすことができない。電子回路論講義中では、2 端子素子としてカプセル化されている（ここでは、後述する制御電源 (controlled power) は除外する）が、ここで付録として電源の実用知識を簡単につけておこう。電源だけでも広大な知識分野であり、これは実験室でのサバイバル・メモ、というところである。電源の中から、発電所、変電所を経て実験室の配電盤から供給される交流電源、ここから回路による変換を経ての直流安定化電源、これらに比べて電極電位独立性の高い化学電池、について簡単に見ていくことにする。

交流供給電源

発電所や変電所については省略する。代表的な交流供給方式 3 種類を、図 2.10 に挙げた。実験室の配電盤を見ると、日本の場合多くは単相 2 線式、および三相 3 線式の端子とブレーカーが組み合わされている。

単相 2 線式 (single-phase two wire system) は、日本国内での電灯線に最も良く使用されている方法で、一方 (中性線) がほぼ接地電位であり、もう一方が交流電圧を担っている。接地電位側にも電流が流れるので機器類の筐体 (case あるいは シャーシ (chassis)), などと接触させると過熱・発火の原因となる。日本の電灯線コネクタ (コンセント) では、ほとんどの機器では挿す方向が決まらず、逆挿しをしても機器の動作上問題ないように作られている。一応、コンセントの細長い穴を見ると、2 つの穴で長さが異なっており、長い方が接地電位と決められている。このため、オス側のコネクタも電極幅を広くして逆挿しができないようになっているものもある。また、きちんとした接地電位を取るために接地端子を設けて向きを決定する場合も多い。が、これも、延長ケーブルなどによって反転してしまうこともあり、また、電気工事の際のミスによって反転して接続されている場合もある。どちらが接地電位なのか知りたい場合、検電ドライバーなどが便利で、ドライバーの先を穴に挿入すると (金属部分をつかむと感電の危険がある)、接地電位でない方でネオン管や LED が点灯するようになっている。

単相 3 線式 (single-phase three wire system) は、米国や、日本でもエアコンや炊事用ヒーターなど大きな電力を要する機器への電力供給に良く使用される方式である。ほぼ接地電位のラインと別に逆位相で交流を供給する 2 本のラインを使用する。逆位相の交流ライン 2 本を接続することで、対地電圧の 2 倍の振幅の電圧を供給することができる。米国製あるいは米国向けの計測機器はこの交流供給方式を前提としているものが多く、日本向けの機器と混在させて使用する場合、接地電位の取り方に注意を要する。電源トランスの容量結合などによって筐体に交流が乗ってビリビリと感電することもある (出力抵抗が大きいため事故になるような大きな電流が流れることはまずない)。

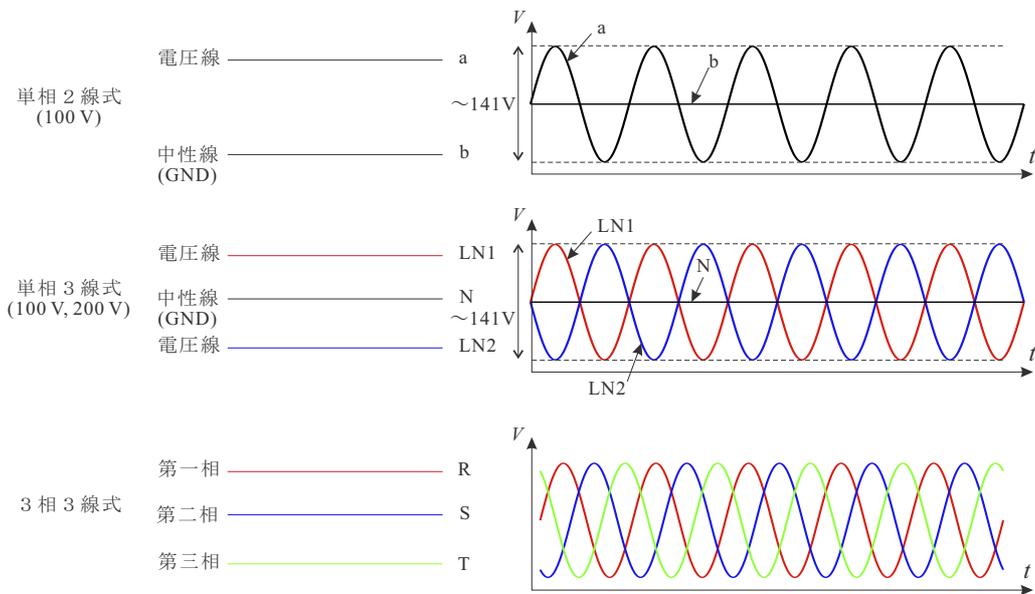


図 2.10 代表的な交流電源供給方式. 各方式での各線の電位時間変化を模式的に右の図に示した. ただし, 特に三相交流の場合, 結線法により対地電位の時間変化は大きく異なる. 図は, 相対的に 120° ずれていることがわかりやすいよう, スター結線と呼ばれる結線方式の場合の電位変化を描いている.

三相 3 線式 (three-phase three wire system) も, 少ない導線リソースで大きな電力を供給するために使用され, モーターなど動力関係で特に多用される. この供給方式は 2 端子ではなく 3 端子であるから, 本文中での交流電源や消費電力の記述に修正が必要となる. 図 2.10 のように, 3 本のラインに $2\pi/3 = 120^\circ$ づつ位相のずれた交流が乗せられている. 三相交流の接続法にはスター結線, デルタ結線など色々があるが, とにかくこの 3 つの相にそれぞれ同じインピーダンスが接続されているとすると, 各線に流れる電流を合計するとゼロとなる. すなわち, 電流を供給源に還流させるためのラインは必要ないことになり, 単純に 2 本ずつの線を使って 3 つのインピーダンスに電力供給した場合に比べて線は半分で済んでしまうことになる. もちろん, 電流が還流していないわけではなく, それぞれのインピーダンスを流れる電流が他の電流とうまくシンクロナイズして流れることで余計な線を用意しなくて済んでいる, ということである.

三相用に設計されたモーターでは, R, S, T の位相を設計通りに接続しないと, 逆回転したり正常に回転しないことが多いので注意が必要である. また, 結線法によって接地電位位置が異なり, これも注意しないと漏電を生じることがある. また, 高い電圧の単相交流がほしくて 3 線の内 2 線を使う場合, 上の話からもわかるように, 「戻り電流ゼロ」の条件が満たされなくなり漏電と同じ状態になることもあるのでこれも要注意である.

直流安定化電源

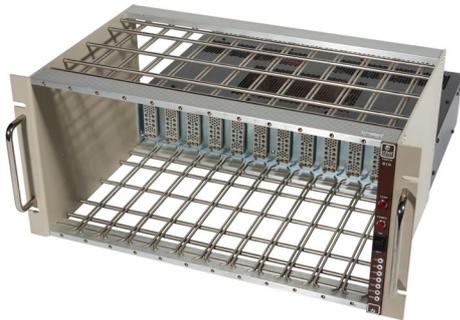


図 2.11 電源ビンの例。パルス NMR 実験用規格品。背面より $\pm 6\text{ V}$, $\pm 12\text{ V}$, $\pm 24\text{ V}$, AC 100V が供給される。

能動素子を用いる際は、直流電源が必要になる場合が多く、かつては良く自作していたが最近では手軽な市販の電源を揃えて接続することが多くなった。高エネルギー実験など、パルスラインに多数の小さな機器を接続してデータ収集系を構成する必要がある実験では、個別の電源を揃えたり結線したりに膨大な手間を必要とするため、かなり以前より、図 2.11 にあるような、19 インチ標準実験用ラックに電源端子が並んだ電源ビン (bin with power supply) が多用されてきた。これは、19 インチラックに規格レールを張り、押し込んだところで後方からの電源端子に接続されるように設計されたもので、電源の乱雑な配線を一気に整理し使いやすくした仕様である。電源の質などは別として方式としては、物性実験などにも広まってよいものだと考える。

直流安定化電源はドロップ型とスイッチング電源の2方式が主である。

ドロップ型

リニア方式、シリーズ方式などとも称する。まず、図 2.12 左のように、トランスを用いて電源電圧を望みの電圧近くに下げる。ダイオードブリッジを通すことで、交流は極性を保って振動する脈流に変化し、これをインダクタとキャパシタを用いたローパスフィルタに通すことで、非安定化直流とする。

「非安定化」というのは、図のようにローパスフィルタを抜けたリップルが含まれていることと、接続する負荷によって電源電圧が変動することを指している。これらを解決して常に既定の低揺らぎ直流電圧を得るために図 2.12 右のようなドロップ型レギュレータ IC を用いる。内部等価回路の説明は、現時点での読者の程度をやや超えるので略す。

ドロップ型は高い電圧から低い電圧を得る際に大きな電力損失を生じるため、次に述べるスイッチング電源に比べて変換効率は良いとは言えない。また電源トランスを用いるため重く大きくなるのが欠点である。が、揺らぎが小さく高周波雑音も少なく発振しにくい、物理実験のためには好適な電源と言える。

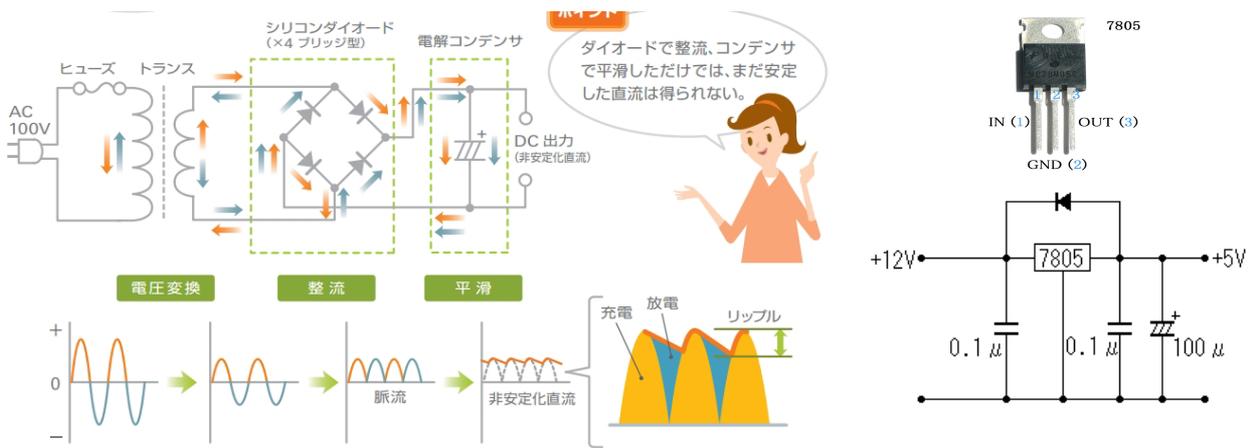


図 2.12 左はドロップ型の直流電源の入力となる非安定化電源の概念図。右上はシリーズレギュレータ IC のひとつ、7805 型。右下は、これを用いた安定化電源の回路図。TDK web <http://www.tdk.co.jp/techmag/power/200807/> より。

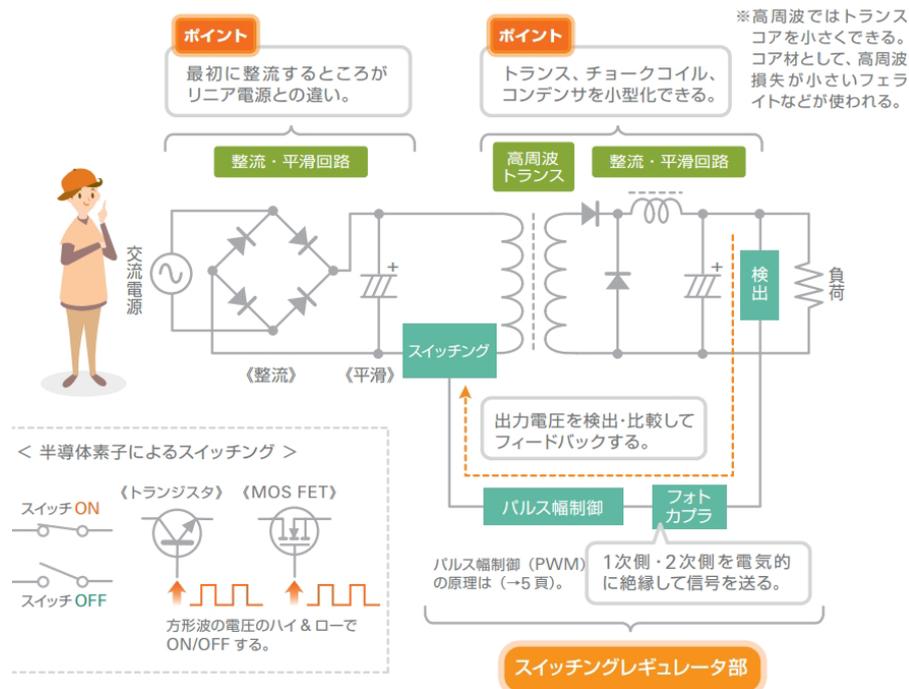


図 2.13 スイッチング電源の概念図。トランスへの入力をパルス化して、時間平均化した出力が規定値になるようにフィードバックをかける。 TDK web <http://www.tdk.co.jp/techmag/power/200807/> より。

スイッチング電源

スイッチング電源の概念図を図 2.13 に示す。入力をトランスを介さずいきなり整流して非安定化直流電源とする。これを MOS FET などのスイッチ素子を使って細切れにしてパルス列とし、トランスなどを介して高周波とし再び平滑化して直流を得る。

このような一見面倒な手間を介する理由は、スイッチ素子を使って細切れにする制御が大変やりやすく、MOS FET などは ON/OFF の抵抗比が大変大きくパルス列変換の際の電力ロスが小さい点にある。すなわち、出力を監視して規定値と比較し、規定値とのずれをなくすようにパルスのデューティ比 (ON 時間が全体に占める割合) をフィードバックをかける。トランスは高周波用であるため鉄心などを用いて大きなインダクタンスを用意する必要がなく、軽量コンパクトで高効率に作ることができる。また、出力電圧もわずかな変更で自在に得ることができる。

欠点は何と言ってもスイッチすることで非常に高い周波数のスイッチングノイズが発生して出力に混入することである。また、フィードバックを通して発振することもあり、容量性やインダクタンスの大きな負荷に給電する際には注意が必要である。

化学電池

以上のような配電盤から供給される電力を用いた直流安定化電源は、シャーシが接地電位となることを前提に設計されている。出力電位には多少の余裕を持たせてはあるものの、負極は電源トランス等の容量結合を通じて接地電位につながっているため、例えば正極を接地電位につないで +15 V を出力すると、負極に -15 V が出力される、ということはない。

これに対して、フロート性が高いのが化学電池であり、比較的自由的な電位位置で所望の電圧を得ることができる。電極での化学反応によって発電するので、平滑化やスイッチングなどによるノイズが少なく高品質の電源となる一方、長時間出力は安定しているとは言えない。また、出力抵抗が大きく大きな電流を取り出そうとすると内部電力損失が大きくなる。これは、電圧標準として用いる標準電池などでも同じであり、参照電圧として使用する場合には注

意を要する。かつては、水銀電池の電圧安定度が高く、簡便な標準として使用されたが環境問題のため使用が禁止されている。

参考文献

- [1] 高橋秀俊, 藤村靖, 「高橋秀俊の物理学講義——物理学汎論 (ちくま学芸文庫)」 (筑摩書房, 2011).

物理屋のための電子回路論 第3回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年10月18日

2.2 受動素子と能動素子

これまで、抵抗、キャパシタ、インダクタについて、特に定義をせずに受動素子 (passive elements) と呼んできた。ここで、能動素子 (active elements) との違いを見ておく。

2端子回路に流れる電流 J と電圧 V を考えた時に、これらの積 JV が常に正になる回路を受動回路と呼ぶ。ただし、この「電流」、「電圧」として、局所相対値を取ることを許す。この「回路」の部分が素子であればこれは受動素子、ということになる。絶対値としての JV が負になるということはエネルギーの湧き出しがあるので、電源を含まない回路ではあり得ないことになるが、局所相対値を考えると、例えば右図 2.14(a) のように I-V 特性にピークを持つ素子の場合、元の J, V に平行な局所座標 $J'-V'$ を取ると $J'V'$ が負になる領域がある。このような素子は、2端子能動素子と呼ばれている。

次に、3端子の回路について、図 2.14(b) のように、4端子回路として扱い、2端子の場合と同様、局所相対値まで考えて $P = J_{in}V_{in} + J_{out}V_{out}$ が常に正であるような場合、この3端子回路は受動回路であるという。 P が負になる領域があるような回路を能動回路と呼ぶ。

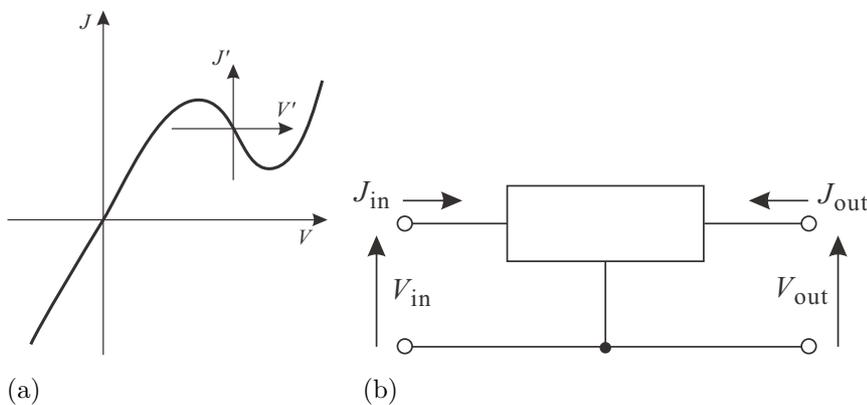


図 2.14 (a) 2端子素子で局所的に電流が負になり得る I-V 特性の例. (b) 3端子素子を4端子回路として接続する.

第3章 伝達関数と周波数応答・過渡応答

我々が電気回路について考察しなければならない場合というのは、1) 何らかの電気回路の動作や特性について知る必要がある時（回路解析）、2) 逆に必要な動作・特性があり、これらを満足する回路を考案しなければならない時（回路合成）、の2つに分けられるであろう。線形応答系の範囲では、これらは、既存回路の伝達関数を知ること、あるいは物理的な要求から伝達関数を構成し、更にこれを具体的な回路へと翻訳すること、と言い換えることができる。本章では、これまでに導入した要素を用いた回路の伝達関数を考え、これを $s = \sigma + i\omega$ 空間内で調べることで、系の周波数応答、および、有限時間の摂動が与えられた時の過渡応答を考えることができる。

3.1 受動素子2端子(1端子対)回路の伝達関数

線形受動2端子対回路の(2端子から見た)伝達関数は、すなわち合成インピーダンス、あるいは合成アドミッタンスである。これを駆動点インピーダンス (driving point impedance) (あるいはアドミッタンス) と呼ぶ。簡単な具体例を見たのち、伝達関数の性質から考えられる系の応答の一般論を考える。

3.1.1 共鳴回路

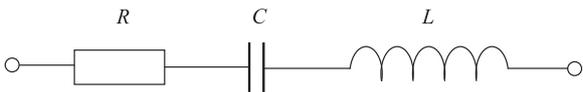


図 3.1 RLC 直列共鳴回路

2端子インピーダンスは一般に複素関数であるが、その実部、抵抗 (resistance) に対し虚部をリアクタンス (reactance) と呼ぶ。これは、2.2.2 項の消費電力の所で無効電力を与える成分、すなわち、系と電源との間のエネルギー循環を生じる部分である。

左図のように、抵抗器、キャパシタ、インダクタを直列に接続した回路を考えると、合成インピーダンス Z_{tot} は

$$V_{\text{tot}}(i\omega) = V_R(i\omega) + V_C(i\omega) + V_L(i\omega) = Z_{\text{tot}}(i\omega)I(i\omega),$$

$$V_R(i\omega) = RI(i\omega), \quad V_C(i\omega) = \frac{I(i\omega)}{i\omega C}, \quad V_L(i\omega) = i\omega LI(i\omega)$$

より

$$Z_{\text{tot}}(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + i\omega L\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad (3.1)$$

となる。ただし、

$$\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.2)$$

は共鳴周波数 (resonant frequency) である。合成インピーダンス中のリアクタンスは $\omega L(1 - (\omega/\omega_0)^2)$ であり、 $s = 0$ に1次の極、 $s = i\omega_0$ にゼロ点を持つ。 $s = 0$ の極は、直列に入ったキャパシタによるものである。ゼロ点、すなわち、 $\omega = \omega_0$ の電流は L と C は全く存在しないかのように透過する。これはリアクタンスの持つ固有振動と入力交流の振動数が一致したときに生じる共鳴現象である。

同様に、左図のように並列接続した場合を考えると、今度は電圧が共通で、電流が全体の和になる。

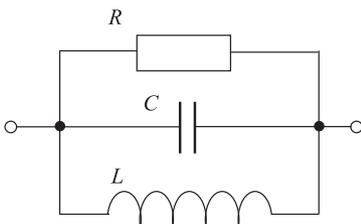


図 3.2 RLC 並列共鳴回路

$$I_{\text{tot}}(i\omega) = \frac{V(i\omega)}{R} + i\omega CV(i\omega) + \frac{V(i\omega)}{i\omega L}.$$

従って合成インピーダンスは

$$Z_{\text{tot}}(i\omega) = \left[\frac{1}{R} + i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \right]^{-1} \quad (3.3)$$

となる。

ω を変化させた時、 $Z(i\omega)$ は図 3.3(a) のような円の上を移動する。これを **Q 円** (Q circle) と言う。アドミタンス Y は図 3.3(b) のように実軸に垂直な直線上を動く。これに対してまた、 $|Z(i\omega)|$ を ω に対してプロットすると、図 3.3(c) のような共鳴ピーク構造を示す。(3.3) の $|Z_{\text{tot}}(i\omega)|^2$ の関数形の共鳴曲線を **ローレンツ型** の共鳴曲線 (Lorentzian) と称する。 Z の抵抗とリアクタンスの大きさが同じになる 2 つの点を ω_1, ω_2 (図 3.3(a)) とするとき $|Z|$ がピーク値の $1/\sqrt{2}$ をとり、 $|\omega_1 - \omega_2|$ ($\approx \gamma$) を一般に **共鳴の幅** という。これと ω_0 との比

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{|\omega_1 - \omega_2|} \approx \omega_0 CR \quad (3.4)$$

を共鳴の Q 値 (quality factor, Q-value) といい、共鳴の鋭さを表す。 L と C の並列回路は、電磁気エネルギーを相互にやり取りすることでエネルギーを蓄える働きがあるため、**タンク回路** と呼ばれている。この場合は、共鳴回路 (タンク) のリークを表す抵抗値 R が大きいほど Q が高い。これは、蓄えられたエネルギーのリークによる時定数が CR であることから、量子力学のエネルギーと時間の不確定性と原理的には全く同じである。

より現実に近い共鳴回路モデルとして図 3.4(a) のようにインダクタに直列に抵抗が入った回路を考える。この場合は

$$Z(i\omega) = \frac{R + i\omega L}{1 - \omega^2 LC + i\omega CR} = \frac{R + i\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + i\omega CR} \quad (3.5)$$

となり、 R がそれ程大きくなければ $\omega = \omega_0$ 付近で極大をとる。この回路の Q 値は

$$Q \approx \omega_0 \frac{L}{R} \quad (3.6)$$

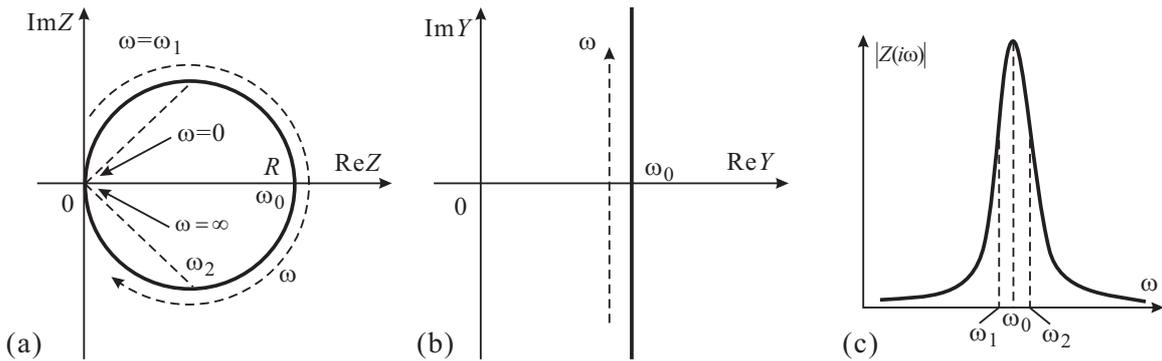


図 3.3 並列共鳴回路の (a) インピーダンス $Z(i\omega)$, (b) アドミタンス $Y(i\omega)$ を複素平面上に、 ω を $0 \rightarrow \infty$ に対する軌跡として描いた。共鳴点が ω_0 であり、共鳴幅に相当する周波数が ω_1, ω_2 である。(c) インピーダンスの絶対値の ω に対する変化。

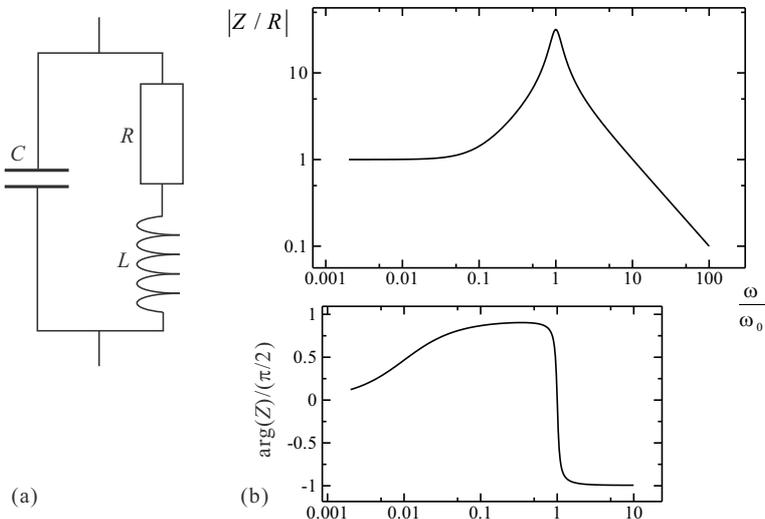


図 3.4 (a) エネルギー散逸のある並列共鳴回路。(b) (a) の回路の伝達関数を ω に対してプロットしたもの (ボード線図)。

となる。これは、やはり抵抗による時定数と共鳴の幅との不確定性を表している。

虚軸上の $Z(s)$ の様子を、その絶対値の対数と偏角を $\omega/2\pi$ の対数に対してプロットしたものを図 3.4(b) に示す。このような ω に対する伝達関数のプロットを**ボード線図** (Bode diagram) とよぶ。ボード線図は様々な回路の周波数特性を表現するのに便利である。この講義でも今後しばしば用いることになる。

3.1.2 共鳴回路の過渡応答

以上では、 $Z(i\omega)$ ないし $Y(i\omega)$ を考えていて、周波数がただ 1 つで一定、すなわち ω 空間でデルタ関数になるような入力に対しての応答を見てきた。これに対して時間軸上で局在した (あるいは一様でない) 入力に対する応答を**過渡応答** (transient response) と呼ぶ。

例として図 3.1 で、 t 直流電圧 $V_0 > 0$ が印可されていて、 $t = 0$ でこれがゼロに落ちる、階段関数の入力があった場合を考える。一応、キャパシタ C の蓄積電荷 $q(t)$ に関する微分方程式で見ておくと、(1.7) より

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (t > 0), \quad q(0) = CV_0 \quad (3.7)$$

である。 $q(t) = CV_0 e^{st}$ として、 $LS^2 + RS + C^{-1} = 0$ より、 $\alpha \equiv (CR)^{-1}$ と置くと、 $s = (-\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 4\alpha^2}) (\omega_0/2\alpha)$ である。 $(\omega_0/2) < \alpha$ の場合に s に虚部が現れ、振動を与える。この場合、

$$q(t) = CV_0 \exp[(-\gamma \pm i\omega_s)t], \quad \gamma \equiv \frac{\omega_0^2}{2\alpha}, \quad \omega_s \equiv \omega_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{4\alpha^2}\right)^{1/2} \quad (3.8)$$

となり、時定数 γ^{-1} 、振動数 ω_s の減衰振動となる。 q の変化に伴い、回路にはこのような減衰振動電流が流れている。

合成インピーダンス、アドミッタンスを s の複素平面上で考え

$$Z_{\text{tot}}(s) = sL + R + \frac{1}{sC}, \quad Y_{\text{tot}}(s) = Z_{\text{tot}}(s)^{-1} \quad (3.9)$$

と書いてみると、(3.7) の特性方程式の解は $Z_{\text{tot}}(s)$ のゼロ点、あるいは $Y_{\text{tot}}(s)$ の極を与えている。言い換えると、 $Z_{\text{tot}}(s)$ のゼロ点 ($Y_{\text{tot}}(s)$ の極) s_0 は、端子間を短絡した場合、これと時間の積を指数関数の肩に持つような自然電流 (電源によるエネルギー供給がない状態で、初期状態次第で回路に流れる電流) が存在し得る。 $-\text{Re}(s_0)$ が減衰時定数、 $\text{Im}(s_0)$ が振動数である。

このことは、伝達関数としての $Z(s)$ 、 $Y(s)$ の意味から容易に理解される。何らかの電圧入力があってその後ゼロに落ちたとすると、そのラプラス変換 $V(s)$ は s 平面上で有限な関数になる。上記境界条件は電圧制御のものであったから $Y(s)$ を考えると、電流出力 $J(t)$ は $Y(s)V(s)$ を逆ラプラス変換することで、

$$J(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Y(s)V(s)e^{st} ds = \sum_i R(s_i)V(s_i)e^{s_i t} \quad (c > 0) \quad (3.10)$$

と書ける。 $\{s_i\}$ は $Y(s)$ の極であり $R(s_i) = Y(s)(s - s_i)|_{s=s_i}$ である。 $Y(s)^{-1} = Z(s) = 0$ に重根がないと仮定している。

上で見たことは、図 3.4(a) で、 $t \rightarrow -\infty$ でやはり電圧 V_0 を端子に印可し、 $t = 0$ で今度は端子を解放状態にして外部に流れる電流をゼロにした場合と回路的には全く等価であり*1、ループ中を減衰振動する自然電流が流れる。ただし、この時、端子間のインピーダンス*2は、端子位置の違いにより、

$$Z_{\text{tot}}^{(2)}(s) = \left(\frac{1}{R + sL} + sC \right)^{-1} = \frac{sL + R}{s^2 LC + sRC + 1} \quad (3.11)$$

*1 もちろん、 $t = 0$ で L を流れる有限な電流があるので初期条件は同じではない。

*2 外部から回路を駆動する端子のインピーダンス、という意味で、**駆動点インピーダンス** (driving point impedance) と呼ばれることもある。

となる。 $Z_{\text{tot}}(s)$ のゼロ点 s_0 は、 $Z_{\text{tot}}^{(2)}(s)$ の極 (pole) になっている。 すなわち、 $Z_{\text{tot}}^{(2)}(s)$ の極は、 端子間を開放した場合、 これと時間の積を指数関数の方に持つような自然電流が存在し得る。 (3.10) で電流電圧を入れ替え、 Y を Z とすれば全く同じになる。

3.1.3 一般的性質

具体例を思い出しながら、 受動素子回路伝達関数 (あるいは駆動点インピーダンス) の一般的性質を考える。 複素平面 s 上で定義される受動素子回路を接続してできる回路の 2 端子インピーダンス $Z(s)$ は、 一般に、

$$Z(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = \frac{a_m (s - s_1) \cdots (s - s_m)}{b_n (s - s'_1) \cdots (s - s'_n)} \quad (3.12)$$

のような有理関数となる。 ここで、 $\{a_i\}$ 、 $\{b_i\}$ はいずれも、 実係数である。 (3.12) のように書けることは、 回路の 1 つの枝のインピーダンスが、 (3.1) あるいは (3.9) のように

$$Z_i = sL_i + R_i + \frac{1}{sC_i}$$

と書け、 これらの合成が、 2.3.2 項のインピーダンスの合成のような代数和で表されることから明らかである。

(3.12) の $\{s_i\}$ は合成インピーダンスのゼロ点、 $\{s'_i\}$ は極を与えている。 これらは、 m 次、 および n 次の多項式のゼロ点であり、 これらの多項式が実係数であることから、 実数または共役複素数対である。 まず、 ゼロ点 $\{s_i\}$ においては、 前節でみたように、 端子 (駆動点) を短絡した時に、 ゼロ点の s_i を指数関数の肩に入れた形の自然電流が発生しうる。 このことは、 (3.10) の逆ラプラス変換を用いた議論がごく一般的に成立することからわかる。 もし、 ゼロ点が複素平面の右半面にあって実部が正であると、 この自然電流は時間とともに発散し、 回路素子がすべて受動素子でエネルギー湧き出しがない、 という仮定に矛盾する。 すなわちゼロ点はすべて左半面あるいは虚軸上になければならない。

次に極 $\{s'_i\}$ においては、 端子を開放した時に、 極の s'_i を指数関数の肩に入れた形の自然電流が存在しうる。 これも短絡の際のゼロ点と同じ理由により、 極はすべて左半面あるいは虚軸上になければならない。

また、 合成インピーダンスの要素が、 s の -1 、 0 、 $+1$ 次のいずれかであることから、 インピーダンスの合成式 (2.27)、 (2.28) より (3.12) の有理式で、 分母分子の s の次数差 $n - m$ は、 -1 、 0 、 1 のいずれかである。 すなわち、 $|s| \rightarrow \infty$ の漸近形では、 $Z_{\text{tot}}(s) \propto s^\gamma$ 、 $\gamma = 0, \pm 1$ のようになり、 例えば、 図 3.4(b) のボード線図で $|Z/R|$ のラインに見るように log-log プロットで ± 1 の傾きを持ったあるいは傾きのない直線となる。 以上は、 合成インピーダンスの極の数とゼロ点の数が同じか 1 だけ違っていることを意味する。

もう 1 つ重要な一般的性質として s 平面上で右半面 $\text{Re}(s) > 0$ の場合に、 $\text{Re}[Z(s)] > 0$ でなければならない。 これも極とゼロ点の議論と同様に、 受動素子回路ではエネルギー湧き出しがない、 という要請から結論されるものである。

3.1.4 クラマース-クローニツヒの関係

伝達関数 (応答関数、 線形応答率) の一般的性質を議論したところで、 その実部、 虚部の間には極めて一般的な関係-クラマース-クローニツヒ (Kramers-Kronig) の関係があることを述べておこう。 トリビアルに近いような簡単な関係であるにもかかわらず、 実験的には極めて有用である。 特に光学のような応答関数の実部、 あるいは虚部の両方のスペクトルを取ることが面倒な測定では、 片方だけを測定することで十分な情報が得られるので、 KK 関係式の積分は実験の標準的な技術にもなっている。

複素振動数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ に対する伝導率 $\Xi(\omega)$ をフーリエ変換して

$$\Xi(\omega_1 + i\omega_2) = \int_0^\infty \Xi(t) e^{i\omega_1 t} e^{-\omega_2 t} dt \quad (3.13)$$

とする。 複素数 z の複素平面において、 関数 $\Xi(z)/(z - \omega)$ を図のような積分路 C で一周積分することを考えると、

積分路上では正則な関数であるからコーシーの定理より、一周積分はゼロである。

$$0 = \oint_C \frac{\Xi(z)dz}{z-\omega}.$$

この一周積分の内、直線部分の寄与は、外側の半円の半径を無限大、 ω 周りの小半円の半径 ϵ を無限小とする極限を取り、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\omega-\epsilon} + \int_{\omega+\epsilon}^{\infty} \right] \frac{\Xi(z)dz}{z-\omega} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Xi(z)dz}{z-\omega},$$

である。外側の半円の寄与は、 $\Xi(z)$ が $|z|^{-1}$ より早くゼロに落ちるとするとこの極限でゼロである。小半円の寄与は、 $\epsilon \rightarrow 0$ の小半円上の $\Xi(z)$ は $\Xi(\omega)$ で一定とし、

$$\Xi(\omega) \int_{\text{小半円}} \frac{dz}{z-\omega} = \Xi(\omega) \int_{\pi}^0 \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} = -i\pi\Xi(\omega)$$

である (図)。

以上より、次のクラマース-クロニツヒの関係式が得られる。

$$\Xi(\omega) = \frac{P}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Xi(z)dz}{z-\omega}, \quad (3.14)$$

$$\text{Re}\Xi(\omega) = \frac{P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\Xi(x)dx}{x-\omega}, \quad \text{Im}\Xi(\omega) = \frac{-P}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\Xi(x)dx}{x-\omega}. \quad (3.15)$$

付録 B : 実験で使用されるブリッジ回路・バランス回路

B.1 ブリッジ回路

ある導線が2つの並列回路に分岐して再結合している場合に、この並列回路を第3の導線が適当な節を通して「橋渡し」しているような回路を、**ブリッジ回路 (bridge circuit)** と呼ぶ。最も簡単なものは図 3.5(a) のようになり、このように四角形と対角線、のような形になる。極めて良く使用されているブリッジ回路は、線形とは言えないが、図 3.5(b) のダイオードブリッジである。ちょうど橋渡し部分が出力となっており、正負に振動する交流を一方に振動する脈流へと整流する作用がある。大学受験によく出題される (?) ホイートストンブリッジでは、未知抵抗 R_u に対して電流計 A を流れる電流がゼロとなるように可変抵抗 R_v を調整することで、

$$R_u = R_1 \frac{R_2}{R_v} \quad (B.1)$$

により R_u を得ることができる。しかし、これは物理実験においてはあまり使用されることがない。実際の抵抗測定では、定電流回路に未知抵抗をつないで両端に生じる電圧を測定するか、定電圧回路につないで流れる電流を測定す

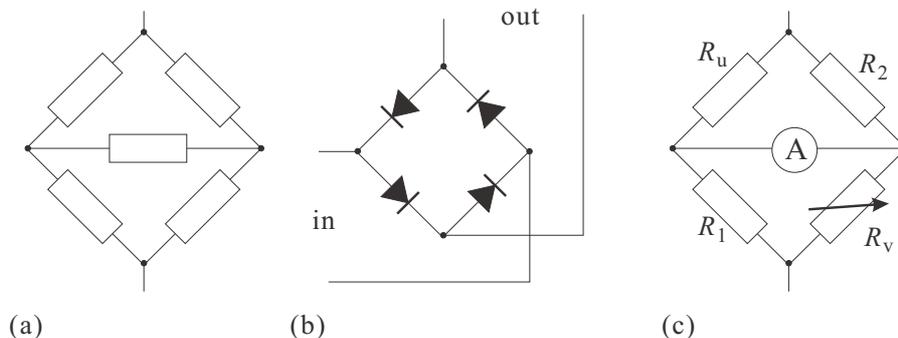


図 3.5 (a) 最も簡単な抵抗ブリッジ. (b) 整流に使用されるダイオードブリッジ. (c) ホイートストンブリッジ.

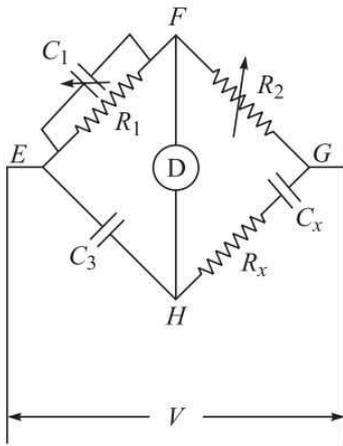


図 3.6 シェリングブリッジ回路.

るといふ単純な方法を取ることがほとんどである。ただし、長時間での小さな変化を取り出すなどの微妙な測定をする場合は、能動系のドリフトなどを打ち消して安定な測定が可能なるブリッジ回路、あるいは1つの電源を用いたバランス回路（このような回路も、広い意味でブリッジと呼ぶことがある）が必要となる。このようなバランス回路については、次の副節で述べる。

また、リアクタンス部まで含めてインダクタンスを測定しなければならないような場合にもブリッジ回路が良く使用される。例として図 3.6 のシェリング (Schering) ブリッジ回路を挙げておこう。ホイートストンブリッジの抵抗をリアクタンスを含むインピーダンスで置換した形をしている。ここでは、右下の辺にあるキャパシタと抵抗の直列回路でこれらの値 (C_x , R_x) が未知だとしてバランスによりこれらを得る。

ブリッジの各辺名 j を図のように、1, 2, 3, x と付け、各辺のインピーダンスを Z_j とする。D に電流が流れない平衡状態では

$$Z_1 Z_x = Z_2 Z_3, \quad Z_x = Z_2 Z_3 Y_1 \quad (\text{B.2})$$

である。ここで、

$$Z_x = R_x + \frac{1}{i\omega C_x}, \quad Z_2 = R_2, \quad Z_3 = \frac{1}{i\omega C_3}, \quad Y_1 = \frac{1}{R_1} + i\omega C_1$$

を上式の代入することで

$$R_x + \frac{1}{i\omega C_x} = R_2 \frac{1}{i\omega C_3} \left(\frac{1}{R_1} + i\omega C_1 \right)$$

となり、実部虚部それぞれの条件から

$$R_x = \frac{R_2 C_1}{C_3}, \quad C_x = \frac{R_1}{R_2} C_3 \quad (\text{B.3})$$

と、 ω によらない結果が得られる。

B.2 バランス回路

「ブリッジ」と呼べるかどうかは微妙だが、インダクタンス結合を用いて交流を差動出力に変化させ、これを直列に加えて差を取ることで基準値からの差分のみを取り出す、バランス回路を2種類紹介する。

図 3.7(a) は、ハーツホーン (Hartshorn) ブリッジと呼ばれる回路で、ここではコイル中に置かれた試料の帯磁率変化によるコイルのインダクタンス変化を取り出すもの。(b) は、原理的にはこれと同じであるが、試料抵抗の微小な変化を標準抵抗出力からの差分として取り出すものである。いずれも、第1回で紹介したコイルをスイッチで切り替える方式の可変インダクタンス (レシオトランス) を用いている。

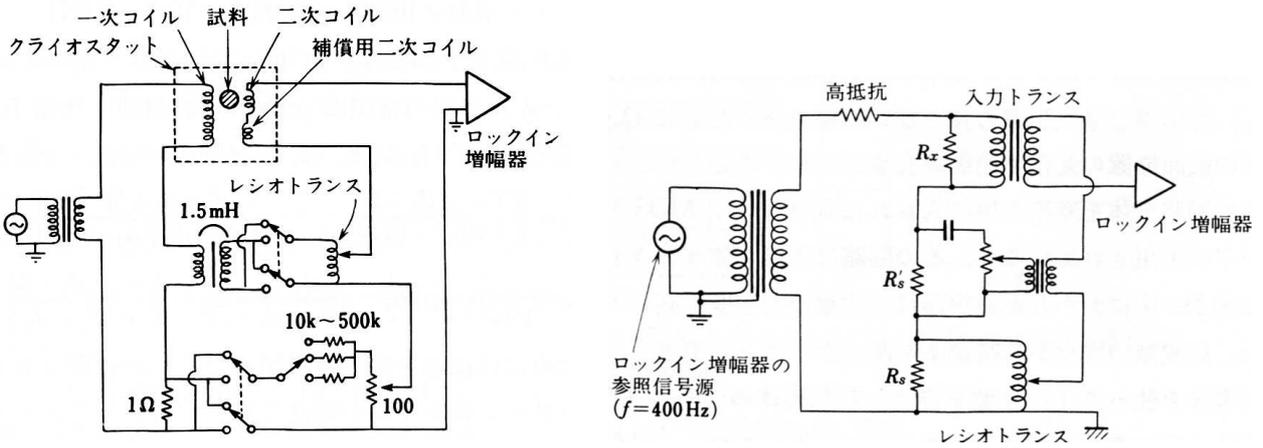


図 3.7 (a) ハーツホーンブリッジ回路. 図はコイル中に置かれた試料の帯磁率を測定する回路. (b) 未知抵抗の微小変化を, 既知抵抗から取り出した交流の差分を取ることで検出する回路. いずれも文献 [2] より.

付録 C : 共鳴現象の一般的性質

共鳴回路は共鳴現象という抽象概念の電子回路による具現化であるが, 一方, 共鳴回路の解析から得られる様々な情報の多くは共鳴現象に一般的なもので, 変化に富む共鳴現象に共通する性質を抽出して我々に教えてくれる. ここにも, 電子回路による概念のモデリングと逆抽出の典型を見ることができる.

C.1 共鳴現象

まず, 共鳴とは系の固有振動数と入力振動数が一致した時に生じる特有の応答現象である. ある系の自由度 q が固有振動数 ω_0 を持つということは, q について調和振動子近似

$$\frac{dq}{dt} = -\omega_0^2 q \quad (\text{C.1})$$

が成立する, ということである. 例えば, 2.3.3 項の並列共鳴回路を, 系の固有振動を見るため電源から切り離して孤立した状態でキャパシタに蓄積された電荷を変数に微分方程式を考える. 電圧共通条件 (キルヒホッフ第 2 則) から

$$L \frac{dJ_L}{dt} = -L \frac{d^2 q_L}{dt^2} = \frac{q}{C} = R J_R = R \frac{dq_R}{dt}$$

である. 孤立していることから電荷保存 (キルヒホッフ第 1 則) により $dq_L + dq_R + dq = 0$. したがって

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

$q = \exp(\lambda t)$ として

$$\lambda = \frac{1}{2\tau} \left[-1 \pm \sqrt{1 - 4(\omega_0 \tau)^2} \right] \approx -\frac{1}{2\tau} \pm i\omega_0 \quad (\omega_0 \tau \gg 1)$$

より, $\omega_0 \tau$ が十分大きい場合は, 固有振動数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ を持っていることがわかる.

C.2 共鳴と位相シフト

前項で見たように, 共鳴は外部入力振動数が系に内在する固有振動と一致してコヒーレントに励起が生じるため, 特異的な応答が生じる現象である. 線形応答系として見ると, 共鳴点ではコヒーレントな励起であるために入力と出力の位相がそろっていなければならないから, 伝達関数の虚数成分, すなわちリアクタンスはゼロとなる. 入力振動数 ω が ω_0 と一致することもちろん同値である.

そこで、このような「共鳴現象」一般について、逆に共鳴回路の性質解析から考えてみる。図 2.6(a) のインピダンス、(b) のアドミタンスについて、 ω が 0 から ∞ まで変化する際に、その偏角、すなわち入力と出力の位相のずれがどのようになるかを見ると、インピダンスでは、 $\pi/2 \rightarrow -\pi/2$ 、アドミタンスでは $-\pi/2 \rightarrow \pi/2$ でちょうど π だけ変化していることがわかる。リアクタンス成分は、 ω の ± 1 次から始まることを考えると、 $\omega \rightarrow 0, +\infty$ で、0 または $\pm\infty$ に発散する。 ω_0 で 0 となることを考えると、全体として π の変化、共鳴点で極限点を基準として $\pi/2$ の変化があることは極めて一般的な現象であることが結論される。

一般的な現象であれば、逆にこれらの共鳴を共鳴 2 端子回路として回路中に持ち込むことも考えられる。特にフィルター回路ではこれが良く行われる。これについては、フィルター回路の項で付録として触れることにしよう。

参考文献

- [1] 高橋秀俊，藤村靖，「高橋秀俊の物理学講義——物理学汎論 (ちくま学芸文庫)」 (筑摩書房，2011)。
- [2] 小林俊一，大塚洋一，「低温技術 第 2 版」 (東大出版会，1987)。

物理屋のための電子回路論 第4回

勝本信吾

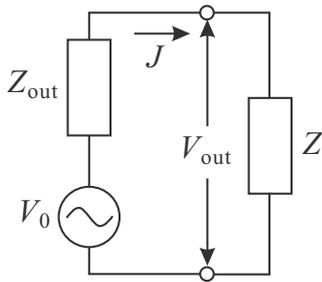
東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年10月24日

3.2 2端子対受動素子回路

次に、端子対数を2個として受動素子で4端子回路を形成した場合の特徴を考え、有用な概念を導入しておこう。2端子対回路の場合、「信号伝送路」としての使用が多くなる。このような伝送回路概念による取り扱い、物理実験上も有用なことが多い。

3.2.1 インピーダンスの整合



2端子対回路に入る前に、ひとつ極めて重要で一般的な概念を導入しておこう。一般の電源を定電圧理想電源と出力インピーダンス Z_{out} の組み合わせの等価回路で考える。電圧、電流を複素数表示で考え、理想電源の電圧を $V_0(i\omega)e^{i\omega t}$ 等と表すと、出力端子に生じる電圧 $V_{out}(i\omega)$ は、

$$V_{out}(i\omega) = V_0(i\omega) - Z_{out}(i\omega)J(i\omega).$$

この時、出力端子に付けた負荷 Z によって消費される有効電力 P は、 $J = V_0/(Z + Z_{out})$, (2.24) より

$$P = \text{Re}(V_{out}^* J) = \text{Re} \left(\frac{Z^* V_0^*}{Z^* + Z_{out}^*} \frac{V_0}{Z + Z_{out}} \right) = \frac{|V_0|^2}{|Z + Z_{out}|^2} \text{Re}(Z)$$

となる。 P を Z の実部虚部それぞれについて停留点をとることにより、 P の最大値 P_{max} は

$$P_{max} = \frac{|V_0|^2}{4\text{Re}(Z_{out})^2} \quad (3.16)$$

で、これは

$$Z = Z_{out}^* \quad (3.17)$$

の時に得られることがわかる。これをインピーダンス整合 (impedance matching) と呼び、この時電源能力が最も効率的に負荷に引き出される。

(3.17) は、負荷インピーダンスが抵抗部分は一致し、リアクタンス部分は符号が反転していることを規定している。リアクタンス部分は、2.2.2 項で見たように電源と負荷との間でエネルギーを循環させている部分に相当するから、ちょうど符号が反転、すなわち位相が 180° 回することで、エネルギーの押し引きのタイミングを一致させ出力インピーダンス側で余計なエネルギーロスを発生しないような条件であることがわかる。

分布定数回路のところで述べるように、信号周波数が高くなり伝送路が長くなると伝送路が持つ特性インピーダンスが重要になる。伝送路の特性インピーダンスを Z_0 とすると、反射が消失する条件をしばしば

$$Z = Z_0 \quad (3.18)$$

と書く。これは、特性インピーダンスの虚部は、2端子素子のインピーダンスとは異なり伝送路に減衰があることを示し、伝送信号特性を決めるのは実部であるため実際問題虚部を問題にしないためである。

3.2.2 伝達関数の極とボード線図

ボード線図が良く使用される理由の1つとして、それぞれのコンポーネントに対して容易に測定が可能であることが挙げられる。すなわち、交流信号源を用意し、出力を測定することで虚軸上での伝達関数の振幅と位相を知ることができる。伝達関数 $\Xi(s)$ の一般形を、(3.12) のインピーダンスと同様に

$$W(s) = B \frac{(s - \beta_1) \cdots (s - \beta_m)}{(s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)} \quad (3.19)$$

と書く。インピーダンスの場合の自然電流のように入力为零になった後も出力が存在する場合、その時刻における応答係数は無限大でなければならないから、このような出力は(3.19)の極から発生している。系が安定であるためには、 $W(s)$ の極が虚軸上あるいは左半面になければならないことは、受動素子回路のインピーダンスについての議論と同様である。(3.19)を虚軸で切って周波数応答 $W(i\omega)$ としたものの絶対値の対数、およびその複素角は

$$\log |W(i\omega)| = \log |B| + \sum_{j=1}^m \log |i\omega - \beta_j| - \sum_{j=1}^n \log |i\omega - \alpha_j|, \quad (3.20a)$$

$$\arg(W(i\omega)) = \arg(B) + \sum_{j=1}^m \arg(i\omega - \beta_j) - \sum_{j=1}^n \arg(i\omega - \alpha_j) \quad (3.20b)$$

となる。

このような伝達関数について、ボード線図がどのようなになるか、見てみよう。実軸上の極は入力がゼロに落ちた後単調減衰する出力に対応するが、このような極を持つ伝達関数の簡単な例として

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \quad (3.21)$$

を考える。 $\arg[W(i\omega)] = -\arg(1+i\omega)$ を θ と置くと、 θ は極 -1 から虚軸上の点 $i\omega$ を望む角の符号を反転したもので、 $\omega: 0 \rightarrow +\infty$ で 0 から $-\pi/2$ まで変化する。 $\log \omega = x$ と置くと

$$\frac{d\theta}{d(\log \omega)} = -\frac{e^x}{e^{2x} + 1}, \quad \frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{e^x(1 - e^{2x})}{(e^{2x} + 1)^2}$$

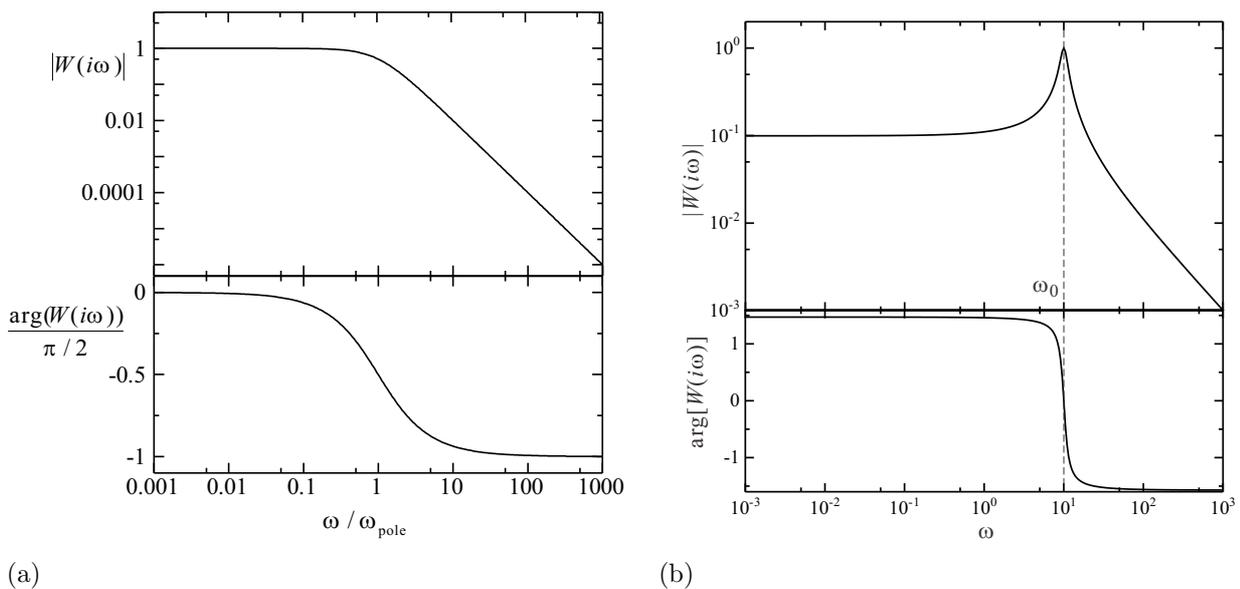


図 3.8 (a) 実軸上に単極がある伝達関数(式(3.21))のボード線図。(b) 共鳴点を表す極 $(-1 + i\omega_0)$, $\omega_0 = 10$ がある場合(式(3.22))のボード線図。

となる. $x \rightarrow \pm\infty$ で $d\theta/dx$ は 0 である. また, $x = 0$ すなわち $\omega = 1$ で $d^2\theta/dx^2 = 0$ となって変曲点となる. 以上から図 3.8(a) の下のような図が得られる. 同様に

$$\frac{d(\log |W(i\omega)|)}{d(\log \omega)} = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad \frac{d^2(\log |W|)}{dx^2} = -\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}, \quad \frac{d^3(\log |W|)}{dx^3} = -4\frac{e^{2x}(e^{2x}-1)}{(1+e^{2x})^3}$$

となり, $x \rightarrow \pm\infty$ で $d(\log |W|)/dx$ は 0, -1 で途中で折れ曲がりが生じ, その位置は, $d^2(\log |W|)/dx^2$ の絶対値が最大となる ($d^3(\log |W|)/dx^3 = 0$) $\omega = 1$ であることがわかる. このように, 実軸上あるいはそれに近いところに極がある場合, 極から $i\omega$ を望む角が $\pi/4$ となる付近で $\log |W|$ の傾きは $0 \rightarrow -1$ と変化し, W の複素角は全体として $-\pi/2$ だけ変化する中間点で最も変化が急になるところである.

次に, 虚部が有限な場合の極の影響を見るために仮想的に

$$W(s) = \frac{1}{s+1-i\omega_0} \quad (\omega_0 > 0) \quad (3.22)$$

という伝達関数を考えてみる*1. これは, 系が固有周波数 ω_0 を持つ場合に相当する. $\omega_0 = 10$ とした場合のボード線図は, 図 3.8(b) のようになる.

$$|W(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega-\omega_0)^2}}, \quad \arg[W(i\omega)] = -\arctan(\omega-\omega_0)$$

より, $|W(i\omega)|$ が $\omega = \omega_0$ でピークを持ち, $\arg[W(i\omega)]$ は $-\arctan(-\omega_0)$ から $-\pi/2$ まで変化する. $\omega_0 \gg 1$ であれば上限は $\pi/2$ で全体の変化の幅は π という共鳴の一般的な性質を表している.

3.2.3 影像パラメタ

図 3.9(a), (b) のように, 端子対 1 側にインピーダンス Z_1 , 2 側にインピーダンス Z_2 を接続した時, 端子対 1 側から見た回路全体のインピーダンスが Z_1 , 端子対 2 側から見た回路全体のインピーダンスが Z_2 になる時, Z_1, Z_2 をこの 4 端子回路の**影像インピーダンス** (image impedance) という. この状態では, 端子対 1 から見ると両側のインピーダンスが Z_1 , 端子対 2 から見ても両側のインピーダンスが Z_2 で共通していることになる. すなわち, 両端子対で信号の意味でインピーダンス整合が取れた状態 (3.32) を仮定している. この場合, 2つの端子対で信号の反射は生じない.

以上のような状況を生じさせるための 4 端子パラメタの条件を調べる. 図 3.9 は端子対 2 側の J の取り方が F 行列とは逆向きであるから, F パラメタを用いると,

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= AV_2 - BJ_2, \\ J_1 &= CV_2 - DJ_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

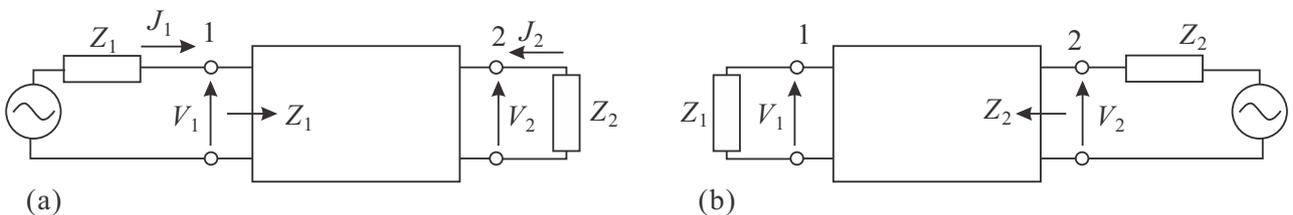


図 3.9 4 端子回路での影像インピーダンスの説明. 交流電流源は駆動点を示すために記入したもので, 内部抵抗はゼロでエネルギー湧き出しを除けば短絡と同じ. (直列インピーダンスと合わせて, 内部インピーダンスを持つ電源と見ても良い.) (a) は端子 1 から 4 端子回路を見た場合, インピーダンスは Z_1 , 端子 1 に接続された負荷も Z_1 である. (b) は, 端子 2 側から見ても同様であることを示す.

*1 「仮想的」というのは, 伝達関数の極は共役複素数対として現れるので本来 $-1-i\omega$ にも極を持つからである. ここではこちらの極の影響は無視して考えている.

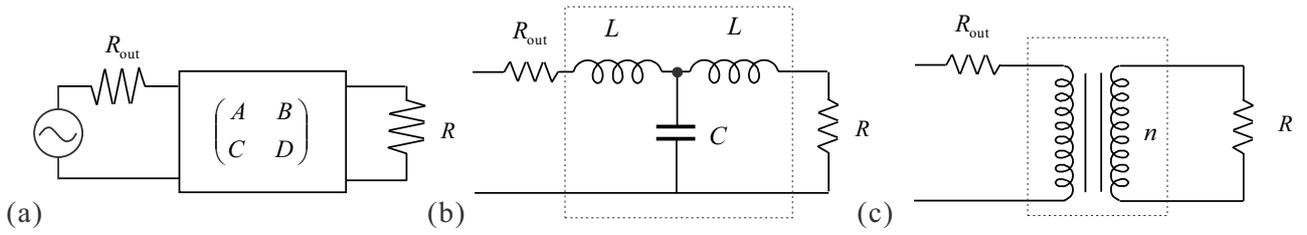


図 3.10 電源と負荷の間に 4 端子回路を挿入することでインピーダンス整合を取る. (a) 問題の状況を示したものの. (b) キャパシタ, インダクタを使った整合. (c) マッチングトランス.

である. $V_2 = -J_2 Z_2$ より,

$$Z_1 = \frac{V_1}{J_1} = \frac{AZ_2 + B}{CZ_2 + D}, \quad (3.24)$$

端子対 2 について同様に

$$Z_2 = \frac{DZ_1 + B}{CZ_1 + A} \quad (3.25)$$

であるから, A, B, C, D がいずれもゼロでないとする,

$$Z_1 = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{DB}{CA}} \quad (3.26)$$

である. また, 図 3.9(a) のように端子対 1 に電源を接続して電圧 V_1 を印可し, 端子対 2 に V_2 が現れたとすると,

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\frac{A}{D}}(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}), \quad \frac{J_1}{-J_2} = \sqrt{\frac{D}{A}}(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) \quad (3.27)$$

となる. ここで,

$$e^\theta \equiv \sqrt{\frac{V_1 J_1}{-V_2 J_2}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2} \frac{J_1}{-J_2}} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1} \frac{V_1}{V_2}} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} \quad (3.28)$$

で定義される θ をこの 2 端子対回路の**影像伝送量** (image propagation constant) と呼ぶ. θ は, 端子 2 から電圧を印可する条件下 (図 3.9(b)) でも同じ値が得られる.

$\theta = \alpha + i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) と書くと,

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{V_1 J_1}{V_2 J_2} \right|, \quad \beta = \frac{1}{2} \arg \left[\frac{V_1 J_1}{-V_2 J_2} \right] \quad (3.29)$$

である. α を**影像減衰定数** (image attenuation constant), β を**影像位相シフト** (image phase shift) と呼ぶ.

また, 以上の定義から逆に, F パラメタを Z_1, Z_2, θ を用いて

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_1}{Z_2}} \cosh \theta, & B &= \sqrt{Z_1 Z_2} \sinh \theta, \\ C &= \frac{1}{\sqrt{Z_1 Z_2}} \sinh \theta, & D &= \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} \cosh \theta \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

と表すことができる. このことから, 線形なパラメタではないが, Z_1, Z_2, θ を**影像パラメタ** (image parameter) と呼ぶ.

3.2.4 4 端子回路によるインピーダンス整合

出力抵抗と負荷抵抗が異なっている場合に, これらの間に 4 端子回路を付加することによってエネルギーの損失なしにインピーダンス整合を取る方法を考える. 出力抵抗や負荷抵抗にリアクタンス成分があると, インピーダンス整合の定義が電力・信号で (3.17), (3.18) のように変化して面倒なので図 3.10(a) のようにこれらにはリアクタンス成分がなく, それぞれ抵抗成分 R_{out}, R だけである場合を考える.

影像インピーダンスの項で最初に述べた条件下で, $R_{\text{out}} = Z_1$, $R = Z_2$ となれば良いわけだが, 一旦 (3.24), (3.25) まで戻って,

$$R_{\text{out}} = \frac{AR + B}{CR + D}, \quad R = \frac{DR_{\text{out}} + B}{CR_{\text{out}} + A} \quad (3.31)$$

である. これより, 整合が取れるための F パラメタの条件を

$$CDR_{\text{out}}^2 - AB = 0 \quad (3.32)$$

と書くことができる.

(i) $ABCD \neq 0$ の場合は (3.26) と同じであり,

$$R_{\text{out}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}, \quad R = \sqrt{\frac{BD}{AC}}. \quad (3.33)$$

(ii) $A = D = 0$ の場合にも解が考えられ

$$RR_{\text{out}} = B/C \quad (3.34)$$

となれば良い. 例えば, 電源の振動数を ω とすれば, 図 3.10(b) のような回路で $\omega L = (\omega C)^{-1} = \sqrt{RR_{\text{out}}}$ とすれば良い. この方法は振動数によるので, 単一振動数の電源にしか使えない.

(iii) $B = C = 0$ の場合.

$$R_{\text{out}}/R = A/D \quad (3.35)$$

である. これはリアクタンスのみで一種の電圧増幅を行っているので, これにはトランスが必要である. 巻き数比 n を

$$n = \sqrt{R/R_{\text{out}}} \quad (3.36)$$

とすれば良い. これは理想的には電源振動数に依存しないので, マッチングトランスとして広く使われている方法である (図 3.10(c)).

3.2.5 波形伝送の忠実性と歪

フィルターの議論をするにあたって線形回路を信号が伝送される場合の歪についてごく一般的な議論をしておこう. 入力 $u(t)$, 出力 $w(t)$ の線形応答系 ($U(i\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$, $W(i\omega) = \mathcal{F}\{w(t)\}$) が, 信号波形に変更を加えない単純で忠実な伝送系であり振幅係数 A_0 , 時間遅れ τ_0 であったとすると,

$$w(t) = A_0 u(t - \tau_0) \quad \therefore W(i\omega) = A_0 e^{-i\omega\tau_0} U(i\omega) \quad (3.37)$$

であるから, 伝達関数 $\Xi(i\omega)$ は

$$\Xi(i\omega) = A_0 e^{-i\omega\tau_0} \quad (3.38)$$

となり, ボード線図上に描かれる 2 つの量は

$$|\Xi(i\omega)| = A_0, \quad \arg[\Xi(i\omega)] = -\omega\tau_0 \quad (3.39)$$

のように, 振幅は定数, 位相は周波数に対して一定の負の傾きを持つ. 逆にこれらが満たされれば, (3.37) のように信号が無歪で伝達される. 第一の条件は, 振幅係数 (透過係数) が周波数によらない, すなわち, 周波数フィルター作用がないことを指定している. 第二の条件は,

$$\tau(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (\phi(\omega) = \arg[\Xi(i\omega)]) \quad (3.40)$$

が ω に対して一定であることを指定している. この $\tau(\omega)$ を群遅延 (group delay) と呼ぶ. 群遅延が一定ということとはすなわち, この回路を伝播する際の一種の群速度が ω に対して一定で分散がないことに相当する.

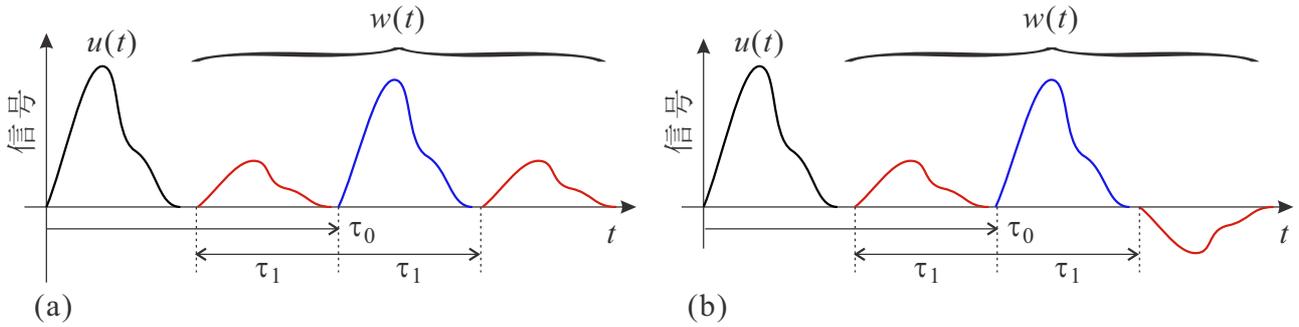


図 3.11 それぞれ、正弦波状の (a) 振幅歪, (b) 遅延歪 が存在する伝送回路の入力 $u(t)$ と出力 $w(t)$ の模式図。青線で示した無歪の主信号出力の前後に赤線で示した対エコーが発生している。

(3.39) の条件から、線形伝送回路を通過する際の信号歪について 2 種類に分類することができる。ひとつは、振幅係数 A_0 が ω 依存性を持ってしまう場合で、**振幅歪** (amplitude distortion) と呼ばれる。もうひとつは、群遅延 $\tau(\omega)$ が ω 依存性を持って平均値 τ_0 からずれる効果によるもので**遅延歪** (delay distortion) と呼ばれる。

まず、正弦波状の振幅歪

$$A(\omega) = a_1 \cos(\tau_1 \omega) + a_0, \quad \phi(\omega) = -\tau_0 \omega \quad (3.41)$$

が加わった場合を考える*2。sin 成分は ω 積分で消える。

$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) U(i\omega) e^{i(\omega t + \phi(\omega))} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega U(i\omega) \{a_1 \cos(\tau_1 \omega) + a_0\} e^{i\omega(t - \tau_0)} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega U(i\omega) \left[a_0 + \frac{a_1}{2} (e^{i\tau_1 \omega} + e^{-i\tau_1 \omega}) \right] e^{i\omega(t - \tau_0)} \\ &= a_0 u(t - \tau_0) + \frac{a_1}{2} [u(t - \tau_0 + \tau_1) + u(t - \tau_0 - \tau_1)] \quad (3.42) \end{aligned}$$

となるので、図 3.11(a) のように、 τ_0 の遅延を持った信号の時間軸上で $\pm\tau_1$ だけずれた位置に同じ形状の信号が現れる。これを**対エコー** (paired echo) と呼ぶ。

次に、正弦波状の遅延歪

$$A(\omega) = A_0, \quad \phi(\omega) = -\tau_0 \omega + b_1 \sin(\tau_1 \omega) \quad (3.43)$$

を考える。cos 成分は実入力に対して虚数出力を出してしまうため、電子回路では発生し得ない特性である。指数関数を 1 次まで展開して

$$\exp[ib_1 \sin(\tau_1 \omega)] \approx 1 + \frac{ib_1}{2i} (e^{i\tau_1 \omega} - e^{-i\tau_1 \omega})$$

として、出力は

$$w(t) = A_0 [u(t - \tau_0) + \frac{b_1}{2} \{u(t - \tau_0 + \tau_1) - u(t - \tau_0 - \tau_1)\}] \quad (3.44)$$

となり、やはり対エコーが生じるが、図 3.11(b) のように τ_1 だけ遅れて現れる後行エコーの符号が反転している。

3.2.6 フィルター回路

フィルター (filter) 回路は、信号の内からある条件を満たすものを選び取るもので、電子回路中至る所に使われ、物理実験の上でもフィルターの知識は有用であることが多い。本章の主題である周波数軸上でのフィルターの働きは、図 3.12 のように大別することができる。

フィルターは入力と出力が考えられそれぞれ端子対で表現されるから、2 端子対 (4 端子) 回路表現が適当である。図 3.12 の縦軸を単に「透過係数」としている。第 1 回の講義で見たように電気信号を表す物理量として電圧を使用

*2 これは、信号論で述べる予定の振幅変調 (amplitude modulation, AM) が搬送波に加わった場合の時間軸を周波数軸に一種の双対変換したもので、時間軸上のエコーが周波数軸の側波帯に相当する。

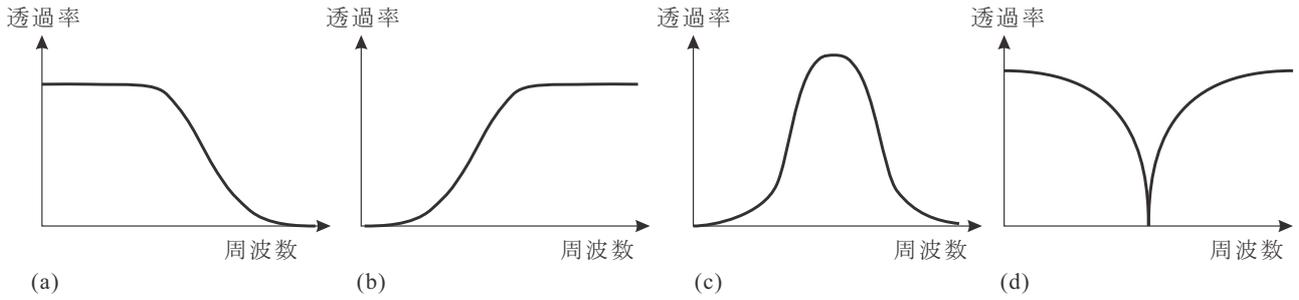


図 3.12 (a) ローパスフィルター, (b) ハイパスフィルター, (c) バンドパスフィルター, (d) ノッチフィルター

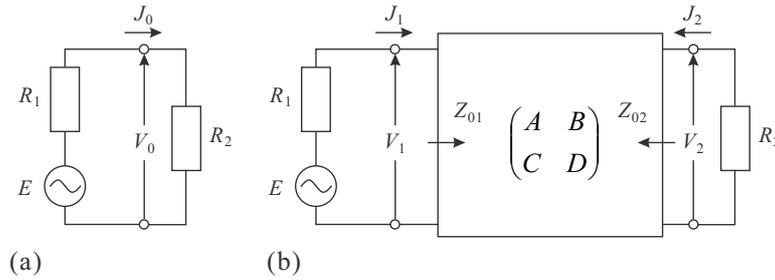


図 3.13 (a) 出力抵抗 R_1 の電源, 負荷抵抗 R_2 が直接接続された状態. (b) 映像インピーダンス Z_{01} , Z_{02} の 2 端子対回路を挿入した状態.

することが多いため透過係数 T としては, 入力信号電圧振幅 $V_1(i\omega)$ と出力信号電圧振幅 $V_2(i\omega)$ の比

$$T(i\omega) \equiv \frac{V_2(i\omega)}{V_1(i\omega)} \quad (3.45)$$

を使用することが多い*3. が, もちろん, これは信号をどのような形で伝送するかに依存し, 電流振幅の比 $J_2(i\omega)/J_1(i\omega)$ を透過係数に取る場合や電力の比を取る場合もある.

(3.45) の自然対数を取って

$$\log T = \log |T| + i \arg T = -\alpha - i\beta \quad (3.46)$$

として, α を減衰 (attenuation), β を位相 (phase) と呼ぶ.

フィルター回路の意味合いから (出力量)/(入力量) を透過係数, あるいは伝送回路分野の好みに合わせると「伝送係数」と呼ぶのが自然であるが, 特に和書では (入力量)/(出力量) を伝送係数 (transmission coefficient) と呼ぶことが多く, 単なる用語の問題であるが, 注意が必要である. ここでは, 動作伝送係数 (square root power transmission coefficient) を導入しておく. この伝送係数は, 和書に合わせて (入力量)/(出力量) で定義している. 図 3.13(a) のように電源と負荷を接続し, 負荷へ輸送される有効電力を P_0 とする. この接続端子部分に (b) のように 4 端子回路を挿入した時に負荷に与えられる電力を P_2 とする. この時, 動作伝送係数は

$$S_B \equiv \sqrt{\frac{P_0}{P_2}} = \frac{R_2 A + B + C R_1 R_2 + D R_1}{2\sqrt{R_1 R_2}} \quad (3.47)$$

と定義される.

このような伝送係数のことを, また利得 (gain) と呼ぶこともある. 利得は通常は 1 以上, すなわち信号振幅が大きくなる (増幅される) 場合に使用される用語であるが, 特にフィルター回路の場合は, 1 以下でも良く使用される. 利得は比であるから物理的な次元がないが, 対数を取ってその大きさを表すことが多い (ボード線図で振幅や係数を対数プロットすることに対応). そこで, 10 を底とする対数を取って対数軸上での 1 を, 電話の発明者 Graham Bell の名を取って 1 Bel のように称する. 略記号は B である. が, 実際にはこの 1/10 目盛りのデシベル (dB) が圧倒的

*3 これは, 量子力学でトンネル現象などを議論する際には複素透過係数と呼ばれる量に相当する.

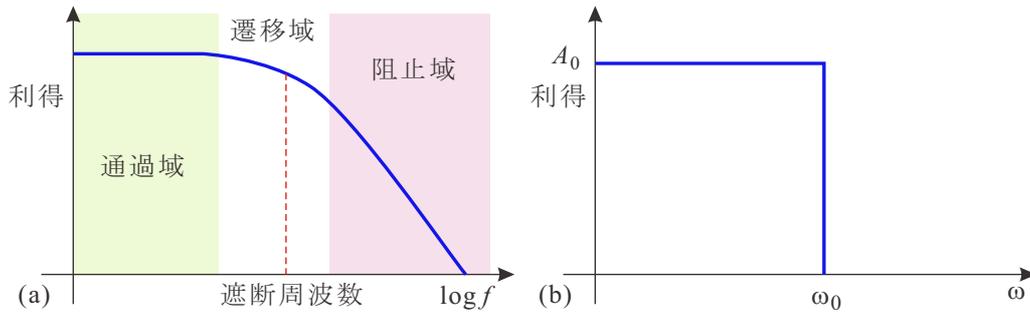


図 3.14 (a) フィルター特性について周波数空間で使用される用語について示したもの. (b) 理想ローパスフィルターの仮想的な利得の周波数依存性.

に使用される. 入力信号電力が P_{in} , 出力信号電力が P_{out} である時, 増幅度が G_f dB である, というのは

$$G_f = 10 \log_{10} \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (3.48a)$$

を意味する. 入力抵抗と出力抵抗が等しい場合には

$$G_f = 20 \log_{10} A = 20 \log_{10} \frac{V_{out}}{V_{in}} \quad (3.48b)$$

となる.

電気回路では, 電力や電圧の絶対値も dB に文字を付けた記号で表し, 混同しやすいので注意が必要である. いずれも基本的な定義の仕方は上記と同じである. 電力の場合 1mW を基準 (P_{in}) に, (3.48a) の式で定義した電力を dBm, 同様に 1fW を基準にした電力を dBf で表す. 一方, 電圧は, 1V を基準に (3.48b) で定義した電圧を dBV, 同様に $1\mu\text{V}$ を基準にしたものを dB μ で表す. 10 を底とする対数による dB に対し, 自然対数を用いて比を表す場合, ネーパー (neper, Np) ^{*4} という表記も使用されるそうであるが, 講師は見たことがない.

周波数軸上では, 図 3.14(a) に示したような用語が使用される. 利得が一定で信号形状が変わらずに通過する **通過域** (pass band), 利得が周波数に対して変曲点を持つ **遷移域** (transient band) (遷移域は無視する場合が多い), 利得が大きく落ちる **阻止域** (stop band), また, 変曲点の周波数を **遮断周波数** (cut-off frequency) という. 図 3.14(b) のように, 階段関数の周波数特性を持つフィルターを考える. 伝達関数は次のようになる.

$$\Xi(i\omega) = A_0 H(\omega_0 - \omega) \quad (3.49)$$

$H(x)$ はヘヴィサイド関数, A_0 は実数, すなわち $\Xi(i\omega)$ の位相はゼロである. このようなフィルターを **理想ローパスフィルター** (ideal low pass filter) と呼ぶ. (3.49) は定義より, $t = 0$ にデルタ関数の入力があった場合の応答関数のフーリエ変換である.

すなわち, 入力 $u(t) = \delta(t)$ に対する応答 $w(t)$ は

$$\begin{aligned} w(t) &= \int_{-\omega_0}^{\omega_0} A_0 e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = A_0 \int_{-\omega_0}^{\omega_0} \frac{d\omega}{2\pi} \cos \omega t \\ &= 2A_0 f_0 \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} = 2A_0 f_0 \text{sinc}(2f_0 t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる. ここで, $f_0 \equiv \omega_0/2\pi$ で, $\text{sinc}(x)$ は

$$\text{sinc} x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (3.51)$$

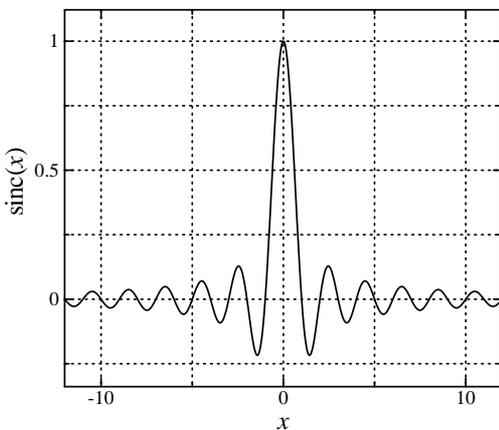


図 3.15 sinc 関数

*4 対数の発見者 John Napier の名前からとったもの.

で定義される関数*5で、sinc 関数と呼ばれ、窓関数

$$P_{\pi/\tau}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau}, \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{\tau} \end{cases} \quad (3.52)$$

をフーリエ変換したものである。物理の学生諸君には、不確定性関係やスリットを通過する波の回折を考える際に良く現れる関数としておなじみであろう。

しかし、実際に (3.50) のような応答があるとすると、入力がある $t = 0$ よりも先に出力が現れていることになり、線形応答系的前提条件として置いた因果律を破っていることになる。ここでは、通常の電子回路では因果律が成立している、とする。すると、理想ローパスフィルターに関して置いた前提、(3.49) が A_0 が実数で位相ゼロ、すなわち遅延がゼロであることも含めて実現不可能なものであった、ということになる。理想ローパスフィルターは、通過域については振幅歪、遅延歪とも全くなく、阻止域の信号は一切通さないもので確かに「理想」であるが、いかに高性能な素子を用いても達成不可能なものである。

それでは、どのような特性なら可能か、ということで、次項でひとつの例を紹介するが、フィルター伝達関数として可能な数学形式によりいくつかの種類が考えられ、代表的な特性については、付録 D にリストアップされている。

3.2.7 K 定数型フィルター

図 3.16(a) の回路で、 Z_1 と Z_2 との間に

$$Z_1 Z_2 = R^2 \quad (3.53)$$

の関係式が成立するとき、これを K 定数型フィルター (constant K type filter) と呼ぶ。ただし、 R は周波数依存性のない定数であり、最初にこのフィルターの議論をした Zöbel が R^2 を K と置いていたため、この不思議な名称がついた。

最も簡単な、図 3.16(b) の場合を考えると、 $Z_1 = i\omega L$ 、 $Z_2 = \frac{1}{i\omega C}$ であるから、(3.53) より

$$Z_1 Z_2 = \frac{L}{C} = R^2 \quad \therefore \sqrt{\frac{L}{C}} = R \quad (3.54)$$

である。映像パラメタを求めると

$$Z_{01} = R\sqrt{1 - \omega^2 LC}, \quad Z_{02} = \frac{R}{\sqrt{1 - \omega^2 LC}}, \quad \coth \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2 LC}} \quad (3.55)$$

である。この R は名目インピーダンス (nominal impedance) と呼ばれる量である。インピーダンスをこの R 、周波数を共鳴周波数 $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ で規格化して、 $\Omega \equiv \omega/\omega_0$ と書くと、

$$z_{01} = \frac{Z_{01}}{R} = \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad z_{02} = \frac{Z_{02}}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2}}, \quad \coth \theta = \sqrt{1 - \frac{1}{\Omega^2}} \quad (3.56)$$

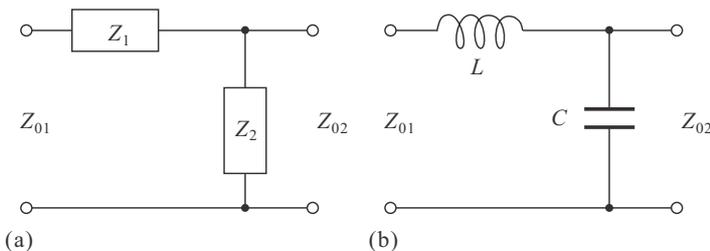


図 3.16 (a) 定 K 型フィルターの一般的形式。
(b) L と C で構成した例。

*5 これは、正規化 sinc 関数と呼ばれ、信号処理などで良く使用される定義である。数学では非正規化 sinc 関数 $\sin x/x$ を sinc 関数と呼ぶことが多い。

である。

(3.29) のように、 $\theta = \alpha + i\beta$ なので、

$$\cosh(\alpha + i\beta) = \cosh \alpha \cos \beta + i \sinh \alpha \sin \beta = \sqrt{1 - \Omega^2}$$

となって、 Ω と 1 の大小により次のように分類される。

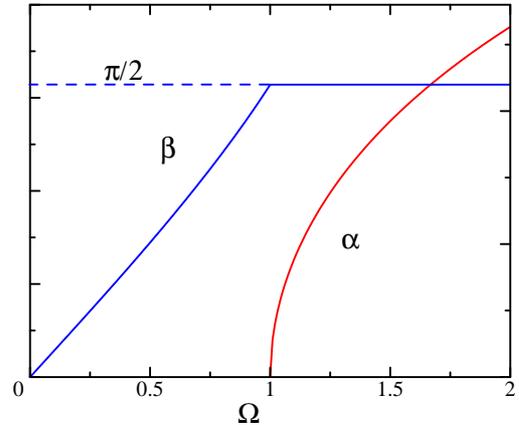
(1) $\Omega \leq 1$

$\sqrt{1 - \Omega^2}$ は実数であるから $\sinh \alpha \sin \beta = 0$ 、すなわち $\alpha = 0$ または、 $\beta = n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) である。しかし、後者は $\cos \beta = \pm 1$ 、 $\sqrt{1 - \Omega^2} \leq 1$ より、 α の解がなくなってしまう。従って $\alpha = 0$ で、減衰のない透過域である。

(2) $\Omega > 1$

$\sqrt{1 - \Omega^2}$ は純虚数で $\cosh \alpha \cos \beta = 0$ 。 $\cosh \alpha$ は 0 にはならないので、 $\cos \beta = 0$ 、すなわち $\beta = \pi/2$ である。 $\sinh \alpha = \sqrt{\Omega^2 - 1}$ より、 $\cosh \alpha = \Omega$ である。

右図に α と β の概略の周波数依存性を示した。このように、 ω_0 からフィルターとしての減衰特性が生じるため、 ω_0 が遮断周波数になっている。



3.3 受動素子回路の過渡応答

伝達関数を $\Xi(i\omega)$ 、入力を $f(t)$ として、 $F(i\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ と書くと、出力 $g(t)$ は

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Xi(i\omega) F(i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.57)$$

とすることができる。これを数値的に解くことが過渡応答の容易な解法である。多くの力学系は対応する電気回路を考えることができるため、その過渡応答について理解・実験しておくことは、容易な物理的シミュレーションとしても有効である。

3.3.1 エネルギー貯留素子数による回路の分類

過渡応答を議論する際に、エネルギー溜めの数による分類が良く行われる。これまで見てきた線形回路素子では、電気エネルギーを貯留するキャパシタ、磁気エネルギーを貯留するインダクタ (まとめてリアクタンス素子) が存在したが、これらが 1 個ある回路を単エネルギー回路、2 個以上ある回路を複エネルギー回路とする。ただし、並列キャパシタのように、1 つの貯留素子にまとめてしまえるものは複数素子とはしない。

これは、伝達関数の極が単数か複数かの違いである。複数存在する場合、位相シフトは全体として π あるいはそれ以上回るため、共鳴・振動現象が生じる可能性がある。共鳴点ではエネルギー貯留回路間でエネルギーのやり取りが生じ、リアクタンス成分が消失するので、貯留素子 (回路) が複数なければならないことは容易に理解される。

単エネルギー貯留回路の伝達関数は一般に極の数は 1 以下であり、代表的には周波数 s 側に適当な係数を導入することで

$$\Xi(s) = \frac{1}{1 + s/s_0} \quad (3.58)$$

の形に書くことができる。最も簡単な例として図 3.17(a) の CR ローパスフィルターでは、 $\omega_0 \equiv 1/CR$ とすると、 $s = i\omega$ に対する伝達関数は、(3.58) の形となる。

複エネルギー貯留回路の代表は、図 3.17(b) の共鳴回路である。すでに式 (2.25) に示したように、この回路の伝達関数は

$$\Xi(s) = \frac{1}{b + s + as^{-1}} \quad (3.59)$$

という形に書くことができる。

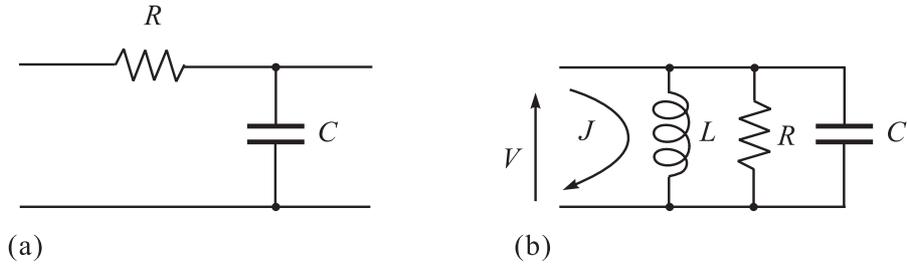


図 3.17 (a) 単エネルギー貯留 (キャパシタ C) 回路. CR ローパスフィルター. (b) 複エネルギー貯留 (キャパシタ C , インダクタ L) 回路. CRL 並列共鳴回路. この場合電流 J に対する電圧応答 V を見る.

3.3.2 階段関数に対する応答

例として, $t = 0$ で電圧 V_{in} が 0 から有限値に立ち上がる, 階段関数的な入力があった場合を考えよう. Heaviside 関数 $u(t) = 0 (t < 0), 1/2 (t = 0), 1 (t > 0)$ を考えると, $u(t)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}\{u\} = \mathcal{U}(i\omega)$ は, 良く知られているように [1]

$$\mathcal{U}(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \quad (3.60)$$

である.

まず, 単エネルギー貯留回路で見てみよう. 図 3.17(a) の回路は過渡応答を見るうえでも最も簡単といえるものである. $t = 0$ で V_0 の階段関数電圧が入力したとすると, R を流れる電流は, 出力電圧を V として $(V_0 - V)/R$ であり, これが C に流れ込んで $Q/C = V$ となるから, V に関する微分方程式は

$$C \frac{dV}{dt} = \frac{V_0 - V}{R} \quad (3.61)$$

となり, $t = 0$ で $V = 0$ という条件から, 直ちに次の V の表式が得られる.

$$V = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{CR}\right) \right]. \quad (3.62)$$

最も簡単な例ではあったが, 複雑な場合であっても結局は常微分方程式を解けば良い, という事はわかる. 同じことを (3.57) のように扱う方法でやってみよう. (3.58) で, 振動数 $\omega (s = i\omega)$ を $\omega_0 = (CR)^{-1}$ で測りなおすことにすると, $\Xi(i\omega) = (1 + i\omega)^{-1}$ である. これと, (3.60) より, (3.57) の $g(t)$ は,

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + i\omega} \left[\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega) \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(i - \omega)\omega} \frac{d\omega}{2\pi} + \frac{1}{2}$$

のようになる. 右辺第 1 項の積分は, 左上のような積分路を取って積分することで得られる. 積分路が囲む極は $\omega = i$ であるから, 小円部分を $\omega = \epsilon e^{i\theta}$, $d\omega = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ と置いて,

$$-2\pi i \frac{e^{-t}}{2\pi i} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\pi}^0 \frac{e^{i\epsilon e^{i\theta} t}}{\epsilon e^{i\theta} (\epsilon e^{i\theta} - i)} \frac{i\epsilon e^{i\theta} d\theta}{2\pi} \right] = -e^{-t} - \frac{1}{2}.$$

結局, これらの和は

$$g(t) = -e^{-t} \quad (3.63)$$

となる. 今振動数を $\omega_0 = (CR)^{-1}$ で測っており, これはすなわち t を CR で測っていることになる. また, 入力階段関数 $u(t)$ の高さを 1 としているので, $t \rightarrow t/CR$ として全体の過渡応答の振幅を V_0 倍し, 境界条件である $t = 0$ での応答を 0 とすると, (3.62) と同じ答が得られていることがわかる.

以上の例は大変簡単のため, ご利益が不明かもしれないが, 特に問題が複雑になった場合に適当に問題設定して微分方程式を解く, ということをせずに, 半自動的に一方向的な計算によって解が得られる点が便利である.

参考文献

[1] 例えば 近藤次郎 「フーリエ変換とその応用」(培風館, 1975).

付録 D: フィルター特性と物理フィルター

フィルター特性は, 伝達関数の数学的表現から分類されている. 代表的なものを見ておこう. 全体に共通する特徴として, 減衰域での周波数依存性があり, ローパスの場合であれば遮断周波数 ω_0 よりも十分高い周波数でゲインが ω^{-n} の形で落ちていく場合, n 次のフィルターと呼ぶ.

D.3 バタワース・フィルター

n 次バタワース (Butterworth) ローパス フィルターのゲインは遮断周波数を ω_0 として,

$$G^2(i\omega/\omega_0) = |H(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_0)^{2n}} \quad (\text{D.1})$$

と表される. この特性は, 透過域においてゲインの波打ち (リップル) がなく, ω_0 近傍から ω^{-n} でゲインが落ちる, 素直な形状をしているのが特徴である.

ただし, 透過域での位相と周波数の関係 $\partial\theta/\partial\omega$ (群遅延特性 group delay characteristics) にはリップルが存在し, 透過信号に歪を生じる. 速い変化に対するリングングやオーバーシュートとしても現れる.

D.4 ベッセル・フィルター

n 次ベッセル (Bessel) ローパス フィルターの伝達関数は

$$H(s) = \frac{\theta_n(0)}{\theta_n(s/\omega_0)} \quad (\text{D.2})$$

である. 特徴は, 群遅延特性にリップルがないことで, ひずみが少なく, 方形波入力に対してリングングを生じない. カットオフ特性が緩やかな点が問題となる場合がある.

D.5 チェビシェフ・フィルター

n 次のローパスチェビシェフ (Chebyshev) フィルターのゲイン (伝達関数の絶対値) は, 次のように表される.

$$G_n(i\Omega) = |H_n(i\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}}. \quad (\text{D.3})$$

Ω は遮断周波数で規格化した周波数, ϵ は透過域のゲインの波打ち (リップル) を決めるリップル係数, T_n は n 次のチェビシェフ多項式である.

透過域でゲインに ϵ で決まる振幅のリップルがある. このため信号の歪は大きく, ステップ信号にはリングングやオーバーシュートが現れる. 一方, 遮断周波数からの減衰特性を急峻にできる特長があり, 狭い帯域で使用する場合, ノッチフィルターとして使用する場合など, 低い次数で高い性能が得られる可能性がある.

D.6 物理的共鳴器を使ったフィルター素子)

共鳴現象を起こす物理系を電子回路に取り込み, 有効的に共鳴回路として用いてしまうこともしばしば行われる. このような場合, 例えば前節のような分類に当てはめるのは困難であることが多い.

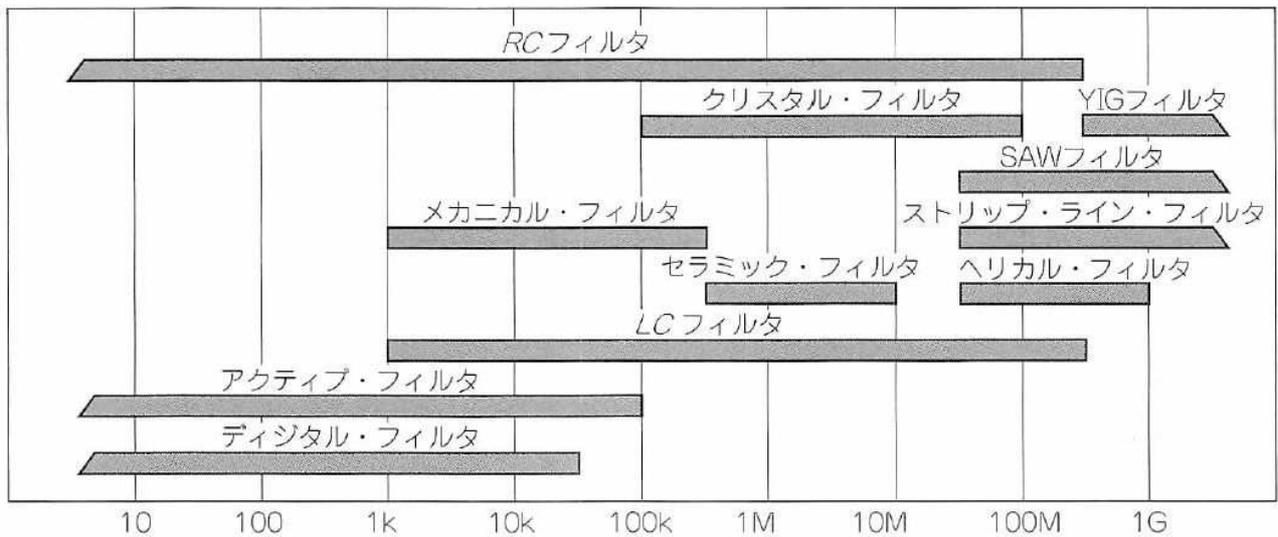


図 D.1 電気回路によるフィルター，様々な物理的共鳴を使用した電気フィルターのカバー周波数範囲．横軸単位は Hz.

D.6.1 クリスタルフィルター

非常に良く知られた例は，**水晶振動子** (quartz crystal unit) である．水晶 (quartz) は， SiO_2 の結晶 (通常は六角柱面を持つ三方晶系) であり，圧電効果 (結晶に機械的圧力が加わることで，電圧を生じる) を持っており，結晶をある面方位の薄片にすると，結晶全体の機械的共鳴により共鳴器として働く．更に誘電体の圧電効果であることから，金属板で挟むことで，そのまま 2 端子電子回路素子として動作させることができる．

水晶振動子の用途で最も多いのは，発振回路であるが，ここでは，図 D.2 のクリスタルフィルターを紹介しよう．(a) のような外観をしていることが多いが，中身は，(b) のように水晶振動子とキャパシタで π 型のフィルターを構成している．(c) のように特性は極めて Q 値が高く，狭帯域のフィルターとして働く一方，(b) で直列にする振動子の中心周波数をわずかにずらして並べることで透過特性のトップがフラットな，「富士山型」の特性 (スカート特性と呼ぶ) を得ることができる．

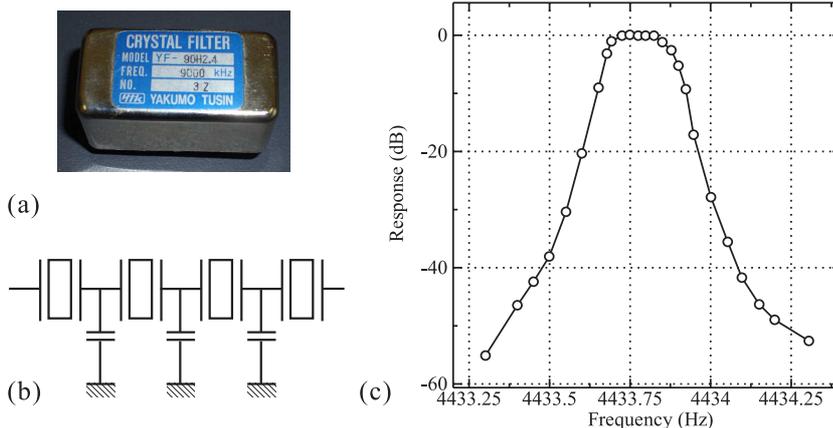


図 D.2 (a) クリスタルフィルターの外観例. (b) クリスタルフィルターの回路図. コンデンサが長方形を挟んでいる形状の記号は，水晶振動子を表す. (c) クリスタルフィルターの周波数特性例. 4 素子 443kHz.

D.6.2 メカニカルフィルター

最近ではほとんど使用されなくなったが，金属で作製した素子の機械的な振動の共鳴を利用したフィルターである．アマチュア無線機器メーカーのコリンズが製作販売しているものなどが有名である．高周波フィルターは困難で，中間周波フィルターなどに使用された．講師の中学生時代など自作派 HAM の垂涎の的であった．

D.6.3 セラミックフィルター

クリスタルフィルターと電磁気的な原理は同じである。水晶ではなく焼成した多結晶セラミック（酸化物）の圧電効果と弾性振動モード共鳴をフィルターとして用いる。メカニカルフィルターを置換して、中間周波フィルターとして多用されている。

D.6.4 SAW フィルター

ピエゾ効果を持つ基板の上に楕形電極を置いて表面弾性波 (Surface Acoustic Wave, SAW) と楕形電極との共鳴によってフィルター効果を実現したもの。携帯電話などの比較的高い周波数の中間周波フィルターなどに使用されている。

D.6.5 YIG フィルター

イットリウム鉄ガーネット (Yttrium Iron Garnet, YIG) 合金単結晶の球の振動を用いたフィルター。強磁性体のため外部磁場によって共鳴周波数を広範囲に変化させることができる。これを用いた発振器は安定な周波数可変発振器として、計測器に広く使用されている。

物理屋のための電子回路論 第5回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年11月1日

第4章 増幅回路

受動素子回路では、信号は伝送に伴ってエネルギー散逸により減衰する。一方、信号論のところでは論じるように一定レベルの雑音が存在するので、伝送による信号情報の逸失を避けるためには、振幅を拡大する、すなわち1以上の利得を持つ回路が必要となる。また、処理した信号を外部機器(多くは電気以外のエネルギーへ変換するトランスデューサー)へ忠実に伝達するためにも十分なエネルギー密度を持つ信号に変換する必要がある。以上の役割を担うのが増幅回路である。まず、増幅器とフィードバックの一般論を述べた後、トランジスタなどの個別増幅素子について見ていく。個別増幅素子には色々と固体物理的な制約からくる「癖」があり、OPアンプのような集積回路はこれらの癖を吸収してユニバーサルな増幅回路設計のツールとなることを目指している。

増幅器を含む電子回路はまた、**制御系** (control system) という工学上の大きな問題の重要な題目であり格好の物理的シミュレーターでもある。本章で現れる制御に関する概念とその運用は、極めて一般的に各種制御工学にも適用されるものである。

4.1 増幅回路と系の制御

4.1.1 増幅器

増幅器 (amplifier, アンプ) ^{*1}は一口に言って電気信号を拡大するものであるが、信号の種類、物理量、信号接地方式などによって様々な分類の仕方がある。直流信号、交流信号の増幅を行うものをそれぞれ、直流増幅器、交流増幅器という。ただし、その境界はあいまいで、交流増幅器は更に周波数帯域によって様々な分類される。一方物理量で分けると、**電圧増幅器**と**電流増幅器**に分けることができる。電場効果トランジスタ (field effect transistor, FET) 回路は前者の、バイポーラトランジスタ (bipolar transistor, BPT) 回路は後者の例になっている。インダクタンス結合による昇圧トランスは広い意味での電圧増幅器である。ただし、電力ゲインがないため、増幅器の中にも含めない人もいる。

増幅器の特性を示す最も重要な量は増幅度 (利得, gain) である。電圧増幅器の場合は電圧増幅度 A は入力信号電圧振幅 V_{in} に対する出力信号電圧振幅 V_{out} の比として定義される。

$$A \equiv \frac{V_{out}}{V_{in}}. \quad (4.1)$$

但し、**差動増幅器**は、+と-の2つの入力端子を持ち、

$$V_{out} = A(V_{in+} - V_{in-}) \quad (4.2)$$

と2つの入力電圧の差を増幅して、接地電位に対する電圧として出力する^{*2}。演算増幅器 (operational amplifier, OPアンプ) がその代表で、後でやや詳しく扱う。

^{*1} 「アンプ」という略し方はいかにも日本語独特風のものであるが、実際には国際的に使われていて、大体どこでも通用すると考えて良い。

^{*2} 場合によっては出力も差動出力となる。

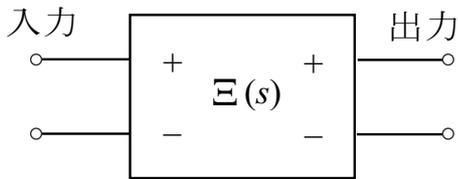


図 4.1 増幅器を表す 4 端子回路ダイアグラム

4.1.2 フィードバック (帰還) 制御

帰還 (フィードバック, feedback) は、読んで字のごとく出力を参照にして入力を調整して望みの出力が得られるようにすることである。このように、出力が何らかの設定値に近づくように考えられた系を**制御系 (control system)** と言う。帰還により、出力情報を入力側に戻すことで制御をおこなう系を、**フィードバック制御系 (feedback control system)**、あるいは**閉ループ制御系 (closed loop control system)** という。これに対して、フィードバックを行わない制御系を**フィードフォワード制御系 (feed-forward control system)**、あるいは**開ループ制御系 (open loop control system)** という。

このような制御、および信号の流れを表現するのに便利なのが、第 1 回の講義でも述べた**ブロック・ダイアグラム** である。ある機能を持ったオブジェクト (今の場合、これを取り出して線形応答系として扱うことのできる部分系) を 1 つの箱 (ブロック) で表現し、信号路および制御関係をこれらをつなぐ線で表す。必要に応じて信号の流れおよび制御の主従関係を線上の矢印で表す (因果律を前提としている)。閉ループ制御系についての例を図 4.2(a) に示した。ここで、三角形の箱は増幅器を表し、右向きの頂点方向が増幅方向を示している。ブロック中に記入された $\Xi(s)$, $h(s)$ などは、この部分系の応答を表す伝達関数である。信号その他の物理量の単純な分割は、回路記号と同様黒丸で表し、丸の中に +, あるいは - 記号を記入したものをを用いて信号を同位相で加えるか、位相を反転して減じるかを表現している。戻し方として、出力が変化した場合、この変化を打ち消すような方向に入力を変化させる (逆相) 戻し方を**負帰還 (negative feedback)** と呼び、変化を大きくする (同相) 戻し方を**正帰還 (positive feedback)** と呼ぶ。ただし、図 4.2(a) で丸の中が + 記号が正帰還、- 記号が負帰還となるとは限らない。 $h(s)$ で表される帰還の応答系、更に増幅器の伝達関数 $\Xi(s)$ による信号の位相変化を考えなければならない。

図 4.2(a) の状況で、帰還信号のラプラス変換は $W_f(s) = h(s)W(s)$ であるから、

$$W(s) = \Xi(s)(U(s) - W_f(s)) = \Xi(s)(U(s) - h(s)W(s))$$

より

$$W(s) = \frac{\Xi(s)}{1 + \Xi(s)h(s)}U(s) \equiv G(s)U(s) \quad (4.3)$$

となる。すなわち、フィードバック回路を加えることで、伝達関数が $\Xi(s)$ から $\Xi(s)/(1 + \Xi(s)h(s))$ へと変化し

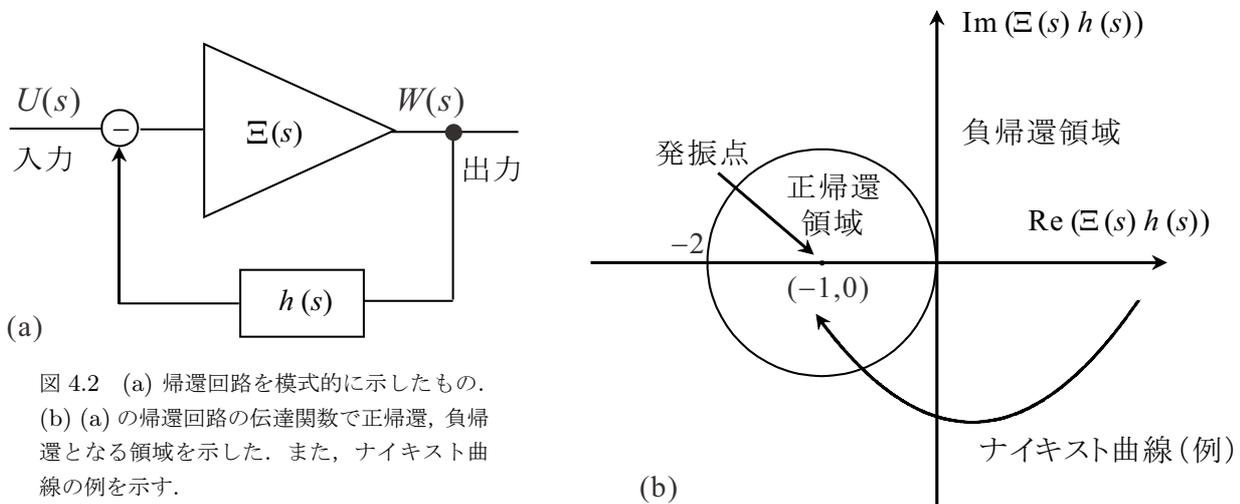


図 4.2 (a) 帰還回路を模式的に示したもの。
(b) (a) の帰還回路の伝達関数で正帰還, 負帰還となる領域を示した。また、ナイキスト曲線の例を示す。

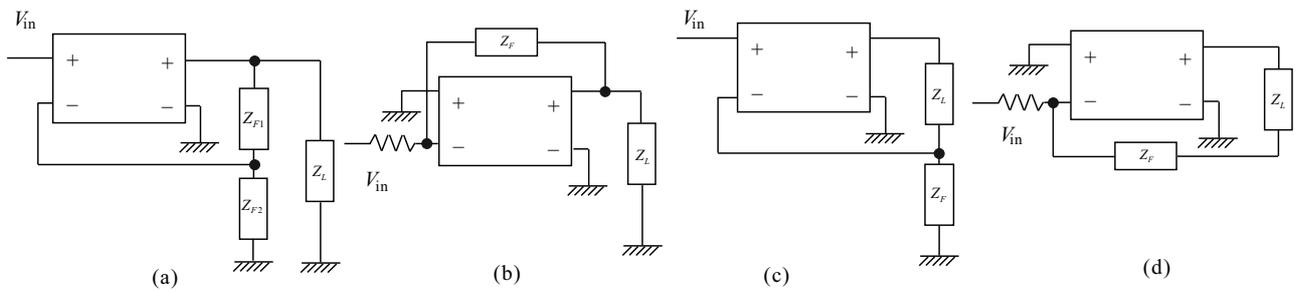


図 4.3 帰還回路の様々な形式 (a) 入出力とも並列. (b) 出力は並列, 入力は直列. (c) 出力は直列, 入力は並列. (d) 入出力とも並列.

たことになる. 定義より, $|1 + \Xi(s)h(s)|$ が 1 よりも大きければ負帰還, 小さければ正帰還ということになる. この時 $A \equiv |\Xi(s)|$ を開ループ利得, $\beta \equiv |h(s)|$ を帰還率, $|\Xi(s)h(s)|$ をループ利得という. また, 閉ループ利得は, $|G| = |\Xi(s)/(1 + \Xi(s)h(s))|$ で与えられる.

ループゲイン $\Xi(s)h(s)$ は一般に角周波数 $\omega = s/i$ に依存するので, これを考慮するためには, ω の変化によって, $\Xi(i\omega)h(i\omega)$ がどのように変化するか調べる必要がある. ω を変化させたときのこのような $\Xi(i\omega)h(i\omega)$ の複素平面上の軌跡を描いたものをナイキスト線図 (Nyquist diagram) と呼ぶ. 従って, 正帰還, 負帰還の判定は, ナイキスト線図の軌跡が -1 を中心とする半径 1 の円の内部にあるか外部にあるかで行われる (図 4.2(b)). ある ω で軌跡がこの円の中心を通る場合, これはシステムの伝達関数の極であり, 発散が起こって入力が零でもこの ω で出力が発生する. この時, $i\omega$ が純虚数であるから, この出力は $\exp(i\omega t)$ で, すなわち出力が振動を続ける発振 (oscillation) が起こる.

負帰還は増幅器の性能向上のために著しい効果をもつ. 増幅器の開ループ利得が変動 (δA) した場合, 帰還なしに使用すれば利得にはその変動が直接現れる. 帰還をかけた $|G|$ の変動は,

$$\frac{\delta|G|}{|G|} = \frac{1}{|1 + \Xi(i\omega)h(i\omega)|} \frac{\delta A}{A} \quad (4.4)$$

である. 負帰還の場合は分母が 1 より大きいので, 変動の割合が小さくなっていることがわかる.

更に, 帰還利得が非常に大きい ($|W(s)h(s)| \gg 1$) とすると, $|G| \approx |h(s)^{-1}|$ となり, 閉ループゲインは帰還回路のみで決まる. これが 1 より大きいためには $|h(s)|$ が 1 より小さければよく, このような減衰器は受動素子のみで構成できる. 一般に受動素子は増幅器を構成する能動素子に比べて温度変化, 素子間のばらつき等が遥かに小さく, 全体のシステムは元の増幅器に比べて, 利得が極めて安定になるばかりでなく, 回路設計も容易となる*3.

また, 単に安定になるばかりでなく, 歪みを抑制する効果も大きい. 能動素子は, トランジスタの項で述べるように一般に非常に非線形性 (non-linearity) が強い. 従ってこれを通った信号は, 帰還がないと大きく歪んでしまう. これに対して抵抗などの受動素子は一般に非常に線形性が高いので, 帰還回路をこのようなもので構成すれば, 全体の線形性は大幅に改善される*4.

4.1.3 帰還と安定性

帰還回路は, 入力/帰還の電圧性/電流性で分類すると 4 種類に分かれる. 増幅器を図 4.1 のように入力・出力を持つ 4 端子回路で表すことにする. 出力信号から帰還信号として, 電圧を取り出す方式を電圧型または並列型と呼び, 電流を取り出す方式を電流型または直列型と呼ぶ. これらの信号を入力端子へ戻す場合にも同様に並列型, 直列型が考えられるので, 結局 4 通りの方法がある. この 4 つを図 4.3 に示した. ただし, 増幅器としてはすべてに同じ物を使うのではなく, (b) と (d) では電流信号を増幅するものを使うとしている.

*3 この「安定」は, 後で述べるように, 必ずしも回路負荷の変動に対し安定に増幅する, という意味ではないので注意が必要である.

*4 ただし, システムの線形性を仮定している. 勿論, システムの応答の主な部分が線形であれば, 少なくとも負帰還に関しては全く同様な議論が成立する.

一方、負帰還回路には、いくつか注意すべき点がある。ひとつは、安定性である。「負帰還回路は安定なはず」であったが、それはあくまで実質的に負帰還として働いている場合であり、入力 s の条件次第では帰還ループ内でついた位相遅れによって正帰還として働き、不安定になる場合がある。もうひとつは、帰還回路中で雑音が付加される可能性がある点で、これは雑音の項で考える。

そこで、帰還回路の安定性を議論しよう。帰還回路の伝達関数は一般に極を持つため、発振や発散(実際には出力無限大とはなり得ないので、このような場合には出力が正負何れかの最大値に貼りつくラッチアップ現象が起こる。)が起こって不安定になりうる。系が安定かどうかは伝達関数の極、すなわち

$$D(s) = 1 + \Xi(s)h(s) \tag{4.5}$$

の零の配置で決まっている。 s の複素平面で零がすべて左半面内であれば不安定を生じる可能性がある $G(s)$ の極位置では出力は $\exp(st)$ に比例し、 $\text{Re}(s) < 0$ であるからこれは時間とともに減衰するので、最終的に不安定性に寄与せず、安定である。一方、右半面内に零が存在すれば時間とともに発散する出力を与え、実際の回路では無論発散はしないが発振やラッチアップが生じ不安定となる。

ここで一般に電気回路では高周波は通りにくくなることから $\Xi(i\omega)h(i\omega)$ は $\omega \rightarrow \infty$ で 0 である。すなわち、 $\Xi(s)h(s)$ が有理多項式の商の形で書けたとすると、(分子の次数) \leq (分母の次数)、すなわちその極の個数は零の個数以上である。従って (4.5) の $U(s)$ を分数形に書くと、分子分母の次数は同じになり、極と零の個数は等しい。また、帰還路自身の伝達は安定と仮定する(受動素子で構成すればほぼこれは満たされる)、(4.5) の極はすべて複素平面で左反面内にある。今、 s を $-i\infty$ から $i\infty$ まで変化させることを考える。(4.5) の複素角は

$$(s \text{ から零を望む角の総和}) - (s \text{ から極を望む角の総和})$$

である(図 4.4(a))。一つの零、あるいは極を望む角は s が $-i\infty$ から $i\infty$ へ移動する間に、それが左半面にある場合には π 、右半面にある場合には $-\pi$ だけ変化する。もしもすべての零が左半面にあれば、この変化は極のものと相殺するからこの移動の間に (4.5) の複素角が変化する総量は零である。右半面に m 個の零が存在すると、 $-2m\pi$ だけの角変化があることになる。

以上から、次のように安定/不安定が判定できることがわかる。 $\Xi(s)h(s)$ のナイキスト線図を描く。これが実軸上の -1 の回りを 1 回転以上回れば (4.5) の複素角は 2π 以上変化するので、システムは不安定で、そうでなければ安定である。これを、**ナイキストの判定法**と称する。 $\Xi(s)h(s)$ のナイキスト線図は一般に原点の回りを時計回りに回る曲線となり、実軸に関して対称である。出発点 ($\omega = 0$) は一般に実軸の正の領域にある(図 4.4(b))。ここから出発して、位相がちょうど π だけ変化する点が、軌跡が下半面を回って実軸に戻ってきた点である。この時、この点が原点から 1 以上離れている時は、軌跡は -1 を周回する事になり、不安定である。従って、 $\Xi(s)h(s)$ に対するボード線図を使うと、左から進んで位相変化が π になったところで利得 $|\Xi(s)h(s)|$ が 1 以上あれば不安定、ということになる。

これは**バルクハウゼンの発振条件**:「帰還回路の利得が 1 以上で位相のずれが 2π 以上」を満たさないようにする、ということを行っているのと等価である。すなわち負帰還回路により既に位相が π だけずれているので、更に位相遅れが π おこれば 2π の位相遅れが発生する。この時点で利得が 1 以上あれば回路は不安定となる。

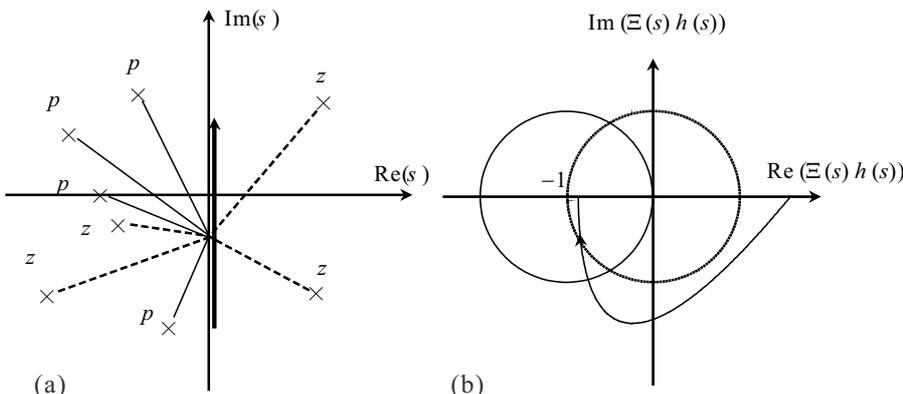


図 4.4 ナイキストの判定法 (a) 伝達関数が極 (p) とゼロ (z) を含んでいる時、周波数 ω を変化させたときに (4.5) の複素角がどのように変化するかを考える。(b) ナイキストの判定条件を模式的に示した。

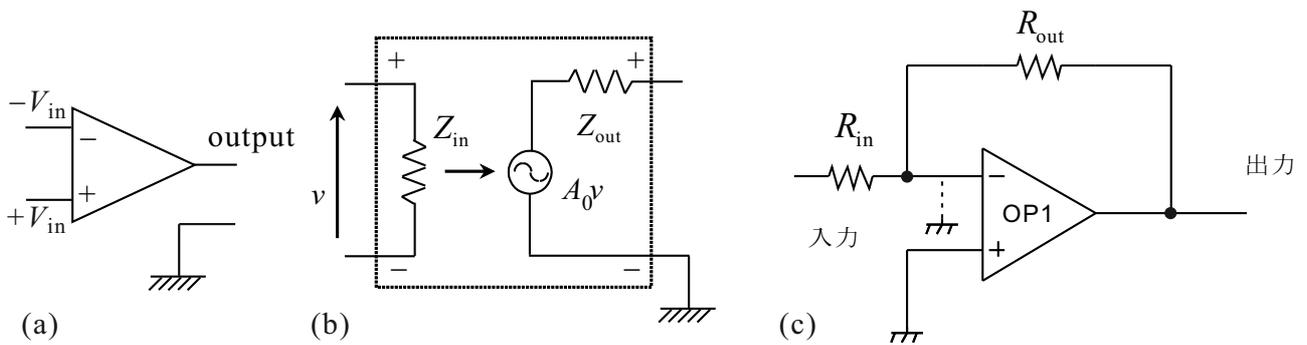


図 4.5 (a) OP アンプの回路記号 (b) 制御電源形式を用いた OP アンプの 4 端子回路表現. (c) 簡単な回路例. 反転増幅回路. 「仮想接地」を点線で示した.

4.2 OP アンプ

OP アンプ (演算増幅器, オペアンプ, operational amplifier) は, 元来はアナログ計算機用に開発されたものだが, 結果として計測回路に革命をもたらした.

OP アンプは, 原理的に新しい素子ではなく, トランジスタや FET そして周辺抵抗などを一つの半導体基板上に作り込んだ集積回路 (IC) である*5. しかし, 使用する立場からは OP アンプはこれら個別素子よりはるかに使いやすく, 帰還回路の応用問題程度の感覚で一通りは使いこなすことができる. より進んだ使用法には, [?] などが参考になる.

4.2.1 OP アンプの基本動作- 線形モデル

OP アンプは, 最も単純には「入力インピーダンス Z_{in} と増幅率 A_o (開ループゲイン) の極めて大きな差動増幅器」と定義することができる. 図 4.5(a) の様に, 差動入力と出力の 3 つの端子を持ち, 三角形の記号で表す. 勿論, この他に最低でも正負の電源端子を接続する必要があるが, 回路図上では省略されることが多い.

理想的モデルを考える. 1 個の OP アンプを図 4.5(b) のような 4 端子回路で表す. 「理想的」な OP アンプでは, その差動伝達関数 (利得) を $A(i\omega)$ とすると, $A_o = |A(i\omega)|$ で, 出力は (4.2) で A を A_o としたものとなる. 理想 OP アンプは

$$\forall \omega \quad A_o \rightarrow \infty, \quad \arg A(i\omega) \rightarrow 0, \quad Z_{in} \rightarrow \infty, \quad Z_{out} \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

の極限として定義される. このモデルでは以下のように簡単な原則により回路設計可能である. まず, $A_o \rightarrow \infty$ と (4.2) から, 回路が安定で有限な出力を持っている場合には, $V_+ = V_-$ でなければならない. すなわち, 正負入力端子間の電位差は零である. 一方 $Z_{in} \rightarrow \infty$ のため, 両端子間には電流は流れない. このように, 見掛け上端子が短絡されていることを**仮想短絡** (imaginary or virtual short) と呼ぶ. この条件の下で, キルヒホッフの法則により各点・各線での電圧電流を求めることができる.

最も簡単な反転増幅器の例を見る (図 4.5(c)). 入力を電圧駆動し, V_{in} , 負入力端子の電圧を V_- とする. 負入力端子に流入する電流 J は, Z_{in} が大きいいため正入力端子に流れ出す成分は極めて小さく, ほとんどが帰還抵抗 R_{out} へ流れ出すため,

$$V_{out} = -A_o V_-, \quad J = (V_{in} - V_-) / R_{in} = (V_- - V_{out}) / R_{out}$$

となる. まず負帰還は正しくかかっているとし, 仮想短絡を仮定すると, $V_- \rightarrow 0$ である. OP アンプ回路ではこのように仮想短絡の結果, 入力端子は両方とも接地電位になることが多く, この場合, - 入力端子は**仮想接地** (imaginary

*5 完全に単一基板上に (モノリシックに) 作るのではなく, いくつかの分離素子をまとめて 1 パッケージにしたものもあり, ハイブリッド OP アンプと称している.

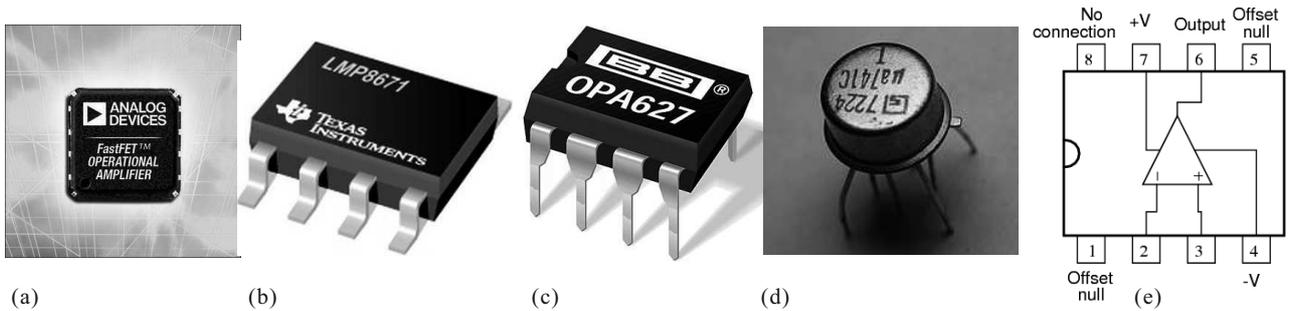


図 4.6 OP アンプの様々なパッケージ. (a) 表面実装ソケットに押し込むタイプ. (b) 表面実装はんだ付け型. (c) 標準 8 ピン DIP 型. (d) 金属筒ケース (TO5) (e) 8 ピンで多いタイプのピン配置 (異なるタイプもある).

earth) 状態にあるという. 2 番目の式より簡単に

$$V_{out} = -\frac{R_{out}}{R_{in}}V_{in} \quad (4.7)$$

となり, 周辺抵抗だけで増幅率が決まってしまう*6. これは, 4.1.2 節で示したように, システム全体の伝達関数が帰還回路のもののみで決まる例となっている. また, この回路は, 帰還回路の分類では, 電圧検出, 電流加算 (図 4.3(b)) に相当する. この時, $|h| = R_{in}/R_{out}$ であり回路全体のゲインは R_{out}/R_{in} となって当然 (4.7) と一致する.

4.2.2 OP アンプのパッケージング

OP アンプは, 入出力端子 3 本と電源用の 2 本の 5 本に加えてオフセット調整用の端子 2 本が出ているものが多く, 7 本の端子を要するが, これ以外に非接続端子 1 本を加えて 8 ピンの IC としてパッケージされているものが多い. 図 4.6 の (a)-(d) に示したように様々なパッケージが出されており, (e) のような接続が標準的である. が, 特にオフセット調整端子は OP アンプにより様々でデータシートを参照する必要がある. また, オフセット調整端子を省略し, 8 ピンパッケージに 2 個入り, 14 ピンパッケージに 4 個入りのような OP アンプも販売されている.

4.2.3 OP アンプ回路の例

OP アンプは「汎用」の増幅器というのが基本であり, 帰還回路を様々に組むことで, 用途に応じた回路とする. 図 4.7 に代表例を示した.

(a) は図 4.5(c) の反転増幅器の入力抵抗をなくし, 電圧入力 (低出力インピダンス信号源) から, 電流入力 (高出力インピダンス信号源) へと変更したもので, $-$ 入力端子が仮想接地され, 高入力インピダンスによって入力電流 J_{in} はすべて帰還抵抗 R に流れ込むことを考えると,

$$-J_{in} = \frac{V_{out}}{R} \quad \therefore V_{out} = -RJ_{in}. \quad (4.8)$$

すなわち, これは入力電流を電圧に変換する電流電圧変換回路として働いている. 物理計測では実際に電流測定に多用される回路である. 式からわかるように, 負荷抵抗 R を大きくすることで感度は高くなるが, 帰還利得 (feedback loop gain, FLG) が小さくなることで, 周波数特性は悪くなる. R が余り大きくない範囲での誤差要因で支配的なのは, 入力バイアス電流と, 有限入力インピダンスによるリーク電流である. 特に電流計測に使用することを考え, 誘電体分離型電場効果トランジスタを用いることで, これら誤差要因電流を $fA(10^{-15}A)$ オーダーに抑えた OP アンプが市販されている. 更に微小な電流を測定したい場合は, フライングキャパシタチャージポンプなどを利用することになる (専用 OP アンプについては付録 A).

*6 これは, 後で出てくるトランジスタのエミッタ接地増幅回路などと同様だが, $A = 10^5 \sim 10^6$ という圧倒的な開ループゲインによりその精度は比較にならない. また, 基本的に直流増幅器であり面倒なバイアスの心配もいらない. 大きな開ループゲインを使った負帰還により, このような簡明さを得られ, これが OP アンプの急速な普及を生んだ.

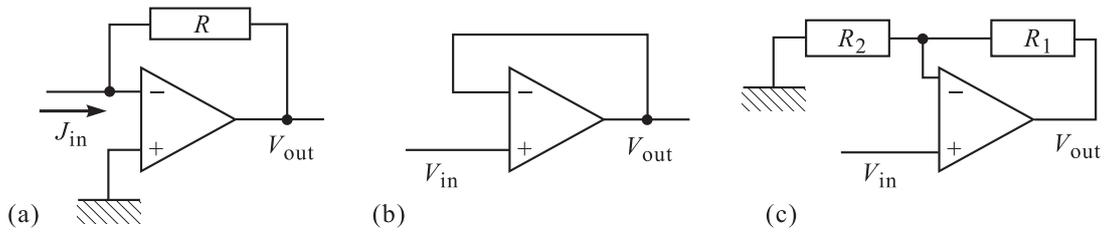


図 4.7 代表的な OP アンプ回路. (a) 図 4.5(c) の反転増幅器で, 入力抵抗を無くして電流入力としたもの. 電圧電流変換回路. (b) 電圧フォロワー. (c) 非反転増幅器. あるいは, R_1 の所を外部出力端子とし, 定電流回路 (電圧電流変換回路) とする.

(b) では, 出力と帰還回路が直結されており, 帰還率は 100% である. 仮想短絡により, $+ \text{入力} = - \text{入力} = \text{出力}$ であるから, 出力電圧は入力電圧と一致する. このような回路を電圧フォロワー (voltage follower) という. 電圧ゲインは 0dB であるが, 入力インピーダンスは $10\text{M}\Omega$ 以上あるのに対して出力インピーダンスは負帰還により 1Ω 以下になっているので, 電力ゲインは $10 \times \log_{10}(10^7) = 70\text{dB}$ と大変大きくなっている. 非常に大きなインピーダンス変換器と見ることもできる.

(c) は, 非反転増幅器と呼ばれている. やはり高入力インピーダンスにより, R_1 と R_2 に流れる電流 J は共通であり

$$J = \frac{V_{\text{out}}}{R_1 + R_2}, \quad \therefore V_{\text{in-}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{\text{out}} = V_{\text{in}} \quad \text{i.e.} \quad V_{\text{out}} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_{\text{in}} \quad (4.9a)$$

となって, やはりゲインは帰還回路の抵抗比だけで決まる. また, J を V_{in} で表してみると,

$$J = \frac{V_{\text{in}}}{R_2} \quad (4.9b)$$

で, 全く R_1 によらない. そこで, R_1 の部分を外部回路で置き換えると, この回路は負荷に依らずに常に (4.9b) の電流を流す定電流電源回路として働く. あるいは, 電圧電流変換回路として働いていると見ることができる.

4.2.4 OP アンプの周波数特性と位相補償

現実の OP アンプでは, 内部で使用されているトランジスタや FET などの能動素子の周波数応答, 更に受動素子のリアクタンス成分などのために, ゲイン $|A(i\omega)|$ は $\omega \rightarrow \infty$ とともに 0 へと減少する. 3.2.6 項のフィルター回路で見たように, 位相遅れ $\arg A(i\omega)$ を 0 に維持してゲインの周波数依存性を変化させることはできないので, 上記ゲインの減少とともに必ず位相遅れが生じる. 負帰還のつもりで帰還をかけても, アンプ内部で π の位相シフトが生じ, かつその周波数でのゲインが 1 を超えていた場合, フィードバック回路での位相遅れがなかったとしても正帰還に転じてしまう可能性が高くなる.

位相遅れについては, 近年市販されている OP アンプはほとんどすべて内部で位相補償 (phase compensation) が行われている. すなわち, 開ループ状態で位相遅れ π の周波数ではゲインが 1 (0 dB) 未満になるように調整されている. この処置をしていない段階での OP アンプのボード線図は, 通常図 4.8(a) のように複数のゲインの折れ曲がり, および, 位相の急変化点が存在している. そこで, 回路の途中に一種の積分回路を挿入し, 図 4.8(a) の点線のようにゲインと極の位置を引き下げ, ゲインが 0dB まで下がる間に位相遅れが $\pi/2$ となるようにする. こうすれば, 抵抗器のような位相回りの少ない素子で帰還路を構成すれば負帰還条件を維持できる. これが位相補償である. この積分回路のコンデンサを IC 内部にすでに持っているものを内部位相補償型と呼び (すなわち最近のものは多くが内部位相補償型である), コンデンサを付けるための端子を出しているものを外部位相補償型と呼ぶ. 外部位相補償型は外付け部品が増えて面倒であるが, 発振や発散を抑えるためのゲインの抑制を最小限にして OP アンプの周波数特性を最大限に利用することができる.

このように位相補償された OP アンプを使っても, 実際の回路では頻繁に発振等が起こる. その原因の多くは, 容量性の信号源や負荷によって負帰還路の位相回りが発生するため (図 4.8(b)) である. いずれもゲインが 0dB を切る

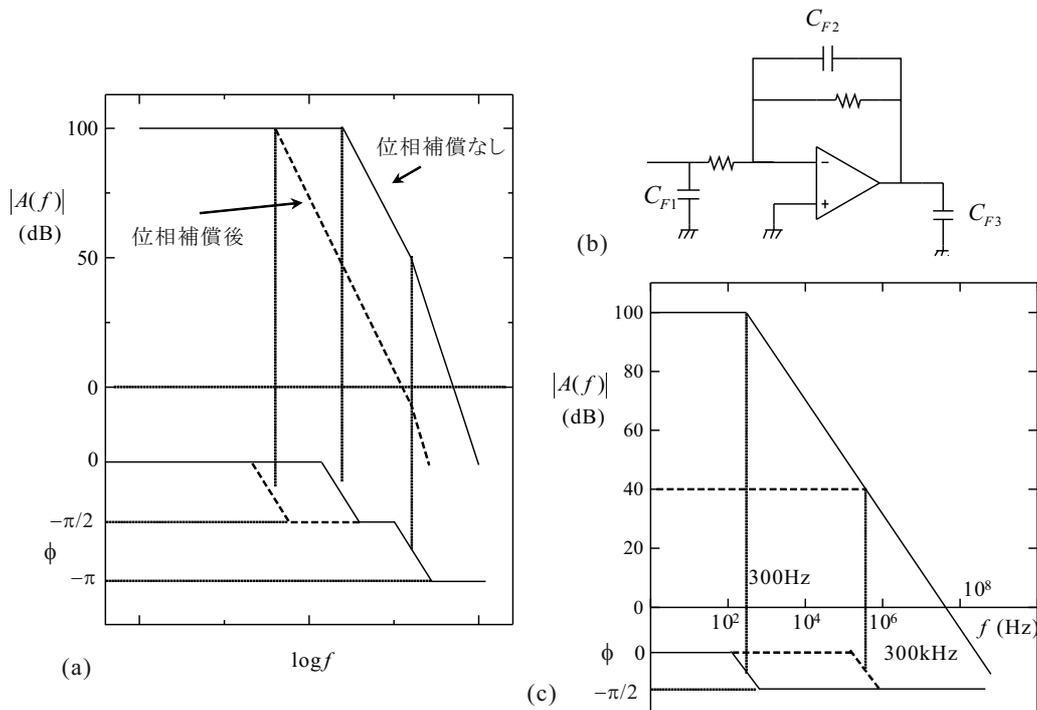


図 4.8 (a) 位相補償をしていない OP アンプのボード線図例 (実線) と、位相補償を施した場合 (点線). (b) 容量性の信号源・負荷によって位相回りが発生する回路例. (c) 発振しにくい OP アンプのボード線図. 負帰還により特性が変化する様子を破線で示す.

前に位相遅れが π に達しているのを、これを回避するためには、点線で記したような回路を付加する。この回路付加に当たっては、ボード線図の知識が有用である。また、注意しなければならない事として、電源ライン回りで信号が漏れて帰還路を形成し、発振に至る場合がある [?]。これには、OP アンプの近傍で電源ラインをコンデンサでアースに交流的に落とすのが有効である。このようなコンデンサをバイパスコンデンサという。

4.2.5 OP アンプの諸特性

現実の OP アンプは理想 OP アンプではあり得ないので、様々な特性を表すパラメタは有限である。直流の開ループゲインは用途にもよるが、多くは $10^5 \sim 10^6$ 程度あることが多い。ゲインがこれから落ち始める周波数 f_T は、遮断周波数と呼ばれる。これは伝達関数の極の位置と強さによっている。また、ゲインが 1(0dB) となる周波数を、単位利得周波数という。内部位相補償を行っている OP アンプでは、周波数特性が図 4.8(c) のボード線図に近くなるように調整されている。ここでは $A_o \sim 10^5$, $f_T = 300\text{Hz}$ としてみた。遮断周波数を過ぎた後は、6dB/oct すなわち、log-log プロットで傾き -1 の直線に沿ってゲインが落ちる。この直線上ではゲインとそのゲインを維持できる周波数の幅の積 (GB 積, Gain Bandwidth product) は一定で、ほぼ単位利得周波数の値に等しい。

さてここで負帰還をかけて、そのゲインを 10^2 としたとする。帰還回路の周波数特性は理想的であるとする、このシステムのボード線図は、図 4.8(c) で点線で示したものになる。 f_T が 300kHz 近くと 3 桁も上昇している。これは、負帰還回路の所で述べた周波数特性の改善である。また、ゲイン一定の領域が広がったことから、歪率も大きく改善されたことになる。ただし、この歪みは入力信号の振幅が小さい時である。大振幅の信号が入力すると、内部回路の一部が一時的に飽和するため小振幅時に比べて周波数特性は大幅に悪化する。このような大振幅入力時の応答特性を表すには、出力電圧の変化速度スルーレート (Slew rate) を用いる。

理想 OP アンプでは入力インピダンスは無敵大であったが、現実の OP アンプでは勿論、有限である。一般に各端子の接地電位に対する絶縁抵抗と、入力端子間のインピダンスは大きく異なり、規格表などでは、前者を単に入力インピダンス、後者を差動入力インピダンスと称している。その値は OP アンプの構成素子によって大きく異なる。こ

これは実装技術の項で述べる。 Z_{in} が十分大きければ入力端子に流れる電流は無視して良いか、 というと必ずしもそうではない。 入力の能動素子が働くために、 入力端子にはほぼ一定の電流 I_B が流れている必要があり、 これを**入力バイアス電流**と呼ぶ。 また、 \pm 入力端子でのバイアス電流の差を入力オフセット電流と呼ぶ。

更に、 双方の入力端子を接地しても出力電圧は零にはならない。 すなわち (4.2) で $V_{in+} - V_{in-}$ の後に定数項 V_{off} が付いていることになる。 これを**入力オフセット電圧**と呼んでいる。 一部の OP アンプにはこのオフセット電圧をできる限りゼロに調整するための端子が出ており、 ここに半固定抵抗器などをつないで調整する。 また、 理想的差動増幅器であれば、 入力端子間を短絡しておけば接地しなくても出力は零あるいは V_{off} の筈であるが、 これもそうはならない。 両方の入力端子に同じ入力を加えた時に、 出力信号が元の信号に対してどれだけ小さくなるか、 すなわち (ゲイン×同相入力信号)/(出力信号)=(差動利得)/(同相利得) を**同相信号除去比** (CMRR, Common mode rejection ratio) と呼び、 差動増幅器を評価する上での重要なパラメタである。 CMRR は強い周波数依存性を持ち、 高周波では著しく劣化する。 有限なスルーレートのために、 大振幅信号では更に小さくなる。 これは、 接地ラインからの入力電圧のずれによる出力であったが、 同様なことは電源電圧の変動に対しても起こる。 これに対しても同様に除去比を定義でき、 PSRR(Power supply rejection ratio) と呼ぶ。

出力インピーダンスも当然有限で、 100Ω 程度あるのが普通であるが、 通常は負帰還により実効的に極めて低くなるので、 低周波では問題にならない事が多い。 以上のような理想 OP アンプからのずれは、 計測回路における様々な誤差を引き起こすので、 これらを十分把握した上で使用することが必要である。

参考文献

- [1] 例えば 近藤次郎 「フーリエ変換とその応用」(培風館, 1975)。

付録 E : OP アンプ回路

本文ではごく基本的な OP アンプ回路を紹介したが、 その他、 計測に良く使用するものを簡単に紹介する。 更に詳細を知りたい方には、 OP アンプ回路の書籍が数多く出版されている ([?] など) ので、 それらを見ていただきたい。

4.E.1 積分回路

図 4.E.1(a) は反転増幅器のフィードバック抵抗の代わりにコンデンサ C を挿入した回路である。 この時、 コンデンサの左側の電極にたまった電荷 Q は流入する電流 V_i/R_i を時間積分したものであるから、 $t = 0$ で $Q = 0$ とすると、

$$V_o(t) = -\frac{Q}{C} = -\frac{1}{C} \int_0^t \frac{V_i(\tau)}{R_i} d\tau = -\frac{1}{CR_i} \int_0^t V_i(\tau) d\tau \quad (\text{E.1})$$

となり、 出力電圧は入力電圧を積分したものである。 これは単なるコンデンサによる積分回路とは異なり、 仮想短絡(接地)により電流の流入端子の電位が一定に保たれるため、 積分としての精度が非常に高い。 これを定電圧回路に接続すれば、 時間に対して線形な変化をする、 電圧スイーパーとして使用できる。

この回路ではコンデンサの選択にも注意が必要である。 ケミカルコンデンサなどは容量が大きく時定数 RC を大きくするには便利だが、 リーク抵抗が低いので、 これを通して漏れる電流が誤差となる。 ゆっくりとしたスイーパーを得るには積層フィルムコンの容量の大きなものが適している。 コンデンサを適当に選べば、 積分器、 電圧スイーパーとしての精度は主に入力バイアス電流によって決まる。 ここでもバイアス電流の小さなものを使う必要がある。 また入力信号の原点が問題になる場合は、 入力バイアス電圧も重要である。

4.E.2 理想に近いダイオード

2端子素子としてのダイオードは、図??(b)のような整流特性を持っているが、更に強い整流性が必要な場合が存在する(任意波形発生回路など)。そのような場合に使用する回路例を図4.E.1(b)に示した。 V_S が正の領域にあるときには、入力された電流は D_1 を通してOPアンプに流れ込み、フィードバックによって-端子はゼロ電位となる。この時、OPアンプ出力は負電位であるため、 D_2 には電流が流れず、 V_o はゼロである。一方、 V_S が負の領域にあるときには、OPアンプ出力は正となり、 D_2 を流れて R_F を流れる。 D_2 での電圧降下によらず、-入力端子の電位はゼロになるはずであるから、

$$V_o = -\frac{R_F}{R_S}V_i \quad (\text{E.2})$$

とリニアな出力が得られる。この時の出力インピダンスは、OPアンプによって非常に低くなっている。

もちろん、これはあくまで4端子回路であり、2端子のダイオードを理想化したものではない。(??)の特性は、電圧入力電流出力の形になっているがこの回路の場合は電圧→電圧である。極端な話、閾値の低い電力制御回路、などにこの「理想ダイオード」を使うことはできない。一方、精密波形合成などには重宝な回路である。

4.E.3 対数アンプ

これは、入力電圧に対してその対数を出力するアンプである。物理では実験に際してこのような出力を必要とすることがしばしばある。例えば、走査トンネル顕微鏡(scanning tunneling microscope, STM)で探針を試料表面に対して一定電圧を保ちながら接近させると、探針と表面間の距離を d として、 $\exp(-d/d_0)$ に比例したトンネル電流が流れる。一方、探針の高さはピエゾ素子を通して制御されており、印加する高電圧の変化にほぼ比例して変化する。 d の変化が小さなプロセスに対する応答ではトンネル電流も線形項が主になるので問題ないが、針のアプローチやラフな表面など d (の仮想変化)が大きい場合は、 d が直接線形に現れるように対数出力がほしい。

このような場合には、図4.E.1(c)を原型とする回路が良く使用される。後出のトランジスタの項で述べるように、トランジスタのベース-エミッター電圧 V_{BE} に対するコレクター電流 $J_C \approx -J_E$ の依存性は指数関数的になる。図

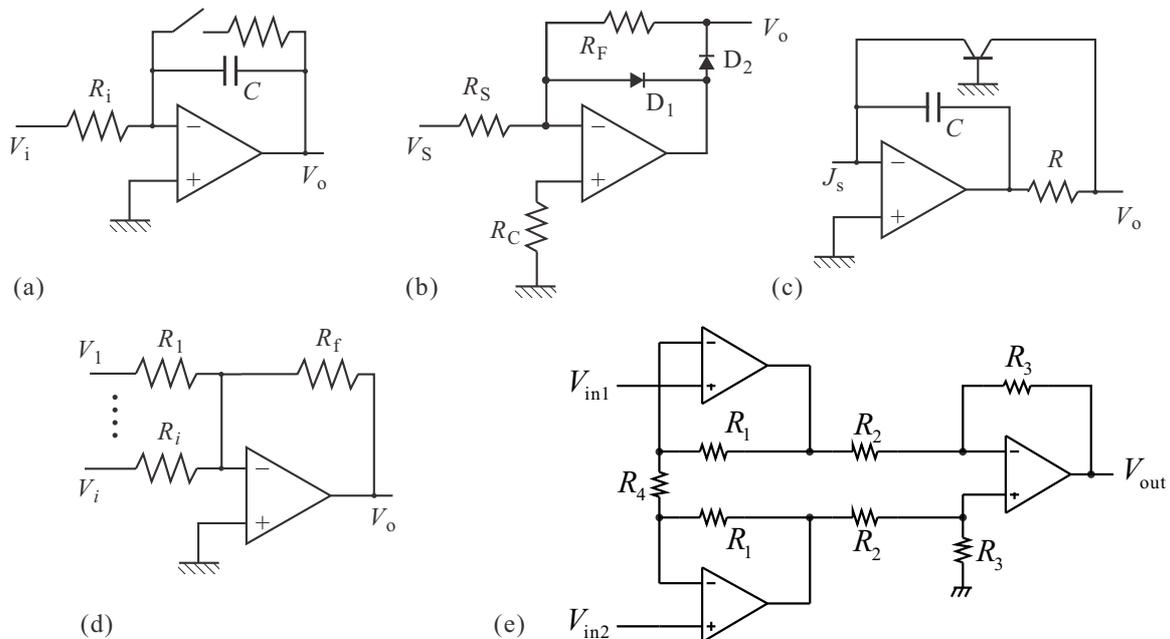


図4.E.1 計測に良く使用されるOPアンプ回路例。(a)積分回路(電圧掃引回路)。(b)理想に近いダイオード回路。(c)対数アンプ。(d)計装アンプ(instrumentation amplifier)

4.E.1(c) はこれを使っているわけであるが、実際に出力を計算してみると、

$$V_o = -V_{BE} = -\frac{k_B T}{e} \ln \left(\frac{J_s}{J_0} + 1 \right) \quad (\text{E.3})$$

と、きちんと対数になっていない上に温度に強く依存し (J_0 も温度に依存する), とても計測に使えるようなものではないことがわかる. ということで, 実際に計測に使用する対数アンプは図 4.E.1(c) に様々な補正回路を付加したものである. これを一つのパッケージにした対数アンプが販売されており, 通常はこれで用が足りる.

この対数アンプは OP アンプ開発の重要な目的であるアナログ計算には極めて重要であり, 乗算を加算化して運用するために使用された.

4.E.4 加算器 (adder)

図 4.E.1(d) で, 端子 i の入力抵抗を R_i , 入力電圧を V_i , とすると, 仮想接地によりフィードバック抵抗 R_f に流れる電流は $-\sum_i V_i/R_i$ であるから, 出力電圧は

$$V_{\text{out}} = -R \sum_i \frac{V_i}{R_i} \quad (\text{E.4})$$

となって入力の線形和が出力される.

4.E.5 計装アンプ (instrumentation amplifier)

差動増幅器は, 計測にとって極めて重要・重宝なものである. そのノイズ除去効果については後述する. 通常の増幅器に求められる様々な要素以外に, 先に述べた CMRR が高いことが要求される. 2つの入力端子に対する信号源インピダンスのばらつきやアンバランスを考えると, 実験回路につないだ時点での CMRR を高く保つには, 入力インピダンスを高くすることが望ましい. このような要請から, 良く使われるのが図 4.E.1(e) にあげた差動増幅器の回路でインストルメンテーション・アンプと呼ばれている. この回路は, 入力に OP アンプの入力端子をそのまま使っているため, 入力インピダンスは極めて高くなる. 図 4.E.1(d) でゲインは

$$V_{\text{out}} = -\frac{R_3}{R_2} \left(\frac{2R_1 + R_4}{R_4} \right) (V_{\text{in1}} - V_{\text{in2}}) \quad (\text{E.5})$$

となる.

問題は CMRR で, 単純なモデルでは抵抗の揃い方で決定され, $R_4 = R_6$, $R_5 = R_7$ であれば無限に大きくなるが, 2端子素子の実装の所で述べたように, 通常の抵抗器の精度が 0.1 ~ 1% であることから, 普通に作製すると, CMRR は低周波でも 40~50dB 程度しか得られないことになる. そこで, 通常はここにトリマーを使用し, CMRR が最大になるように調整する. しかしそれでも, 温度変化などにより抵抗値が動くとやはり CMRR の低下を招いてしまう. そのため, このような OP アンプと抵抗のセットをモノリシックに作り込み, レーザートリミングで CMRR 最大に調整したものが, 単体の素子として発売されている. これも, IC₃ とその周辺抵抗だけ搭載したものから, デジタル信号でゲインを変化できるものまで様々である.

物理屋のための電子回路論 第6回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年11月1日

4.2.6 増幅器の歪み

本来 4.1 節の中で扱うべきであったが，端子対回路を通じた際の信号の歪についてはフィルター回路で述べた通りであり，新しいことはなかったので省略していた．復習もかねて見ておくと，入力 $u(t)$ に対して出力 $w(t)$ が， K を定数として

$$w(t) = Ku(t - \tau) \quad (4.10)$$

であれば，歪はない． τ は時間遅延である．伝達関数を例によって

$$\Xi(i\omega) = \exp[-\alpha(\omega) - i\beta(\omega)] \quad (4.11)$$

とすると，(4.10) より，

$$\exp[-\alpha(\omega) - i\beta(\omega)] = K \exp(-i\omega\tau) \quad (4.12)$$

であるから，無歪条件は

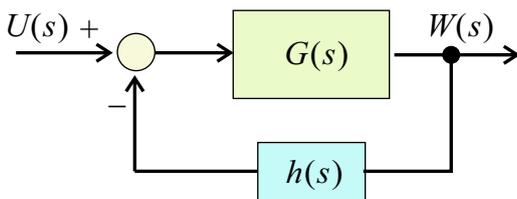
$$\alpha(\omega) = -\ln(K), \quad \beta(\omega) = \omega\tau \quad (4.13)$$

である．すなわち，伝達関数の振幅は周波数に対して一定，群遅延 $d\phi/d\omega$ も一定が無歪の条件である．これらが近似的に満たされるのが，カットオフ周波数 f_T 以下の周波数の信号ということになる．

4.3 フィードバック制御系

フィードバック (フィードフォワード) は，電子回路に限らず広く系の制御に使用されている手法である．OP-amp のように線形性の良い系はまれであり，安定で速い制御の確立のために様々な方法が使用される．電子回路のフィードバック回路安定性の判定法として Nyquist の図形的な判定法を紹介したが，ついでに Hurwitz の判定法も証明なしで紹介しておこう．折角なので代表的な方法で，物理実験の機器制御にも良く使用される PID 制御法の紹介をしておこう．

4.3.1 Hurwitz の判定法



左図のようなフィードバック回路を考える．全伝達関数は

$$\Xi(s) = \frac{G(s)}{1 + h(s)G(s)} \quad (4.14)$$

である． $\Xi(s)$ の極を求める方程式が s の n 次方程式とする．

$$1 + h(s)G(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \quad (4.15a)$$

$$= a_n (s - p_1) \cdots (s - p_n). \quad (4.15b)$$

一般に高次方程式は解けないので、(4.15a) の形から安定性を判定するのが Hurwitz の判定法である。

まず、(4.15a) で係数 $\{a_j\}$ の正負に混じりがある場合、系は不安定であることが証明できる (s の右半面に極がある)。そこで、係数 $\{a_j\}$ はすべて正の場合について考える。次の $n \times n$ Hurwitz 行列を定義する。

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

区切り線は、2行ずつ入れてある。この行列に対して、Hurwitz 行列式 H_i を次のように H から i 行、 i 列までとった行列式と定義する。

$$H_1 = a_{n-1}, H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \dots \quad (4.17)$$

この時、Hurwitz の判定条件は次のとおりである。

Hurwitz の判定条件

伝達関数の極を与える方程式が (4.15a) のように与えられる場合、系の安定条件は、

$$H_j > 0 \quad (j = 2, \dots, n = 1) \quad (4.18)$$

である。(ただし、 $H_1, H_n > 0$ は仮定により自明に成立する。)

n の次数が低いときは次の等価な条件も有効である。

Hurwitz の判定条件 2

伝達関数の分母を偶関数部 $E(s)$ と奇関数部 $O(s)$ とに分ける。 $E(s) = 0$ の解と $O(s) = 0$ の解とが虚軸上に交互に並んでいる場合、系は安定である。

4.3.2 擾乱、雑音

ゆらぎについては雑音の章で扱うことになるが、ここでも「電子回路論」特有のゆらぎへのアプローチを見ておこう。物理系でゆらぎを扱うには、統計的な手法を使い分布関数などでこれを表すことが良く行われる。それ以外に、何らかのストカスティックな外力を考える手法があり、電子回路的なアプローチはこれを単純化したものである。図 4.8 はその例で、擾乱、雑音、として外部電源を用意する。これらを図のようにある特性を持った伝達関数として表し、ブロック図の特定箇所で作ると、代数的に取り扱うことができる。

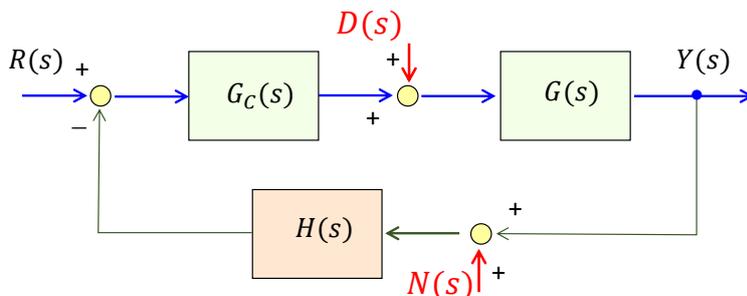


図 4.8 フィードバックブロックダイアグラムに、外部電源として擾乱 $D(s)$ 、雑音 $N(s)$ を伝達関数として加えたものの例。

図 4.8 の例では,

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{G(s)}{F(s)} [G_C(s)R(s) + D(s) + G_C(s)H(s)N(s)] \quad F(S) \equiv 1 + G_C(S)G(s)H(s) \\
 &= W_{RY}(s)R(s) + W_{DY}D(s) + W_{NY}N(s)
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

のように, 入力, 擾乱, 雑音に対してリニアな形で出力を表すことができ, ここからフィードバックのノイズ耐性などについて解析を進めてゆくことができる. (具体的には当然 $D(s)$ その他の中身による.)

4.3.3 PID 制御

系の制御のために極めて広く使用されている PID 制御について簡単に (というのは, 電子回路のフィードバック自身ではそれ程使用されないからで, 電子回路を応用する面では非常に使用される) みておこう. PID とは, 比例補償 (P, proportional compensation), 積分補償 (I, integral compensation), 微分補償 (D, derivative compensation) という 3 つの「補償器」(制御器) を操作に加えたフィードバック制御のことである. フィードバック理論では, 何らかの応答をするシステムの伝達関数 $G(s)$ に直列に補償器 (あるいは制御器) の伝達関数 $G_c(s)$ を加えるのが普通である. 図 4.9 に PID 制御のブロックダイアグラムを示した. これまでも見たように, ラプラス変換系では積分は s^{-1} , 微分は s で表されるので, 伝達関数としては P 制御器は K_P (定数), I 制御器は K_I/s , D 制御器は $K_D s$ と表される. PID 制御ではこれらを図 4.9 のように並列接続したのちに加えるので,

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s
 \tag{4.20}$$

のように書くことができる. 図 4.9 では出力を入力から直接引き算しているので, $Y(s) = R(s)$ となるように制御するのが普通である.

ここではこれ以上深入りしない (文献 [1]などを参照) が, 例えば加熱の電力を制御して系の温度を一定に保つ場合, 最も簡単な P のみの制御の場合, フィードバックの遅延によってオーバーシュートが生じたり, また, 熱の散逸に伴う緩和率 Γ が存在すると, 目標値を R_0 として $R_0/(K_P\Gamma + 1)$ だけの定常誤差を生じることが知られている. 最適制御係数は, 出力を振動させて振動周期・振幅から得られる. 最近の PID 制御器は CPU とプログラムを内蔵し, 自動的にこれらの最適パラメーターを抽出するようになっているものが多い.

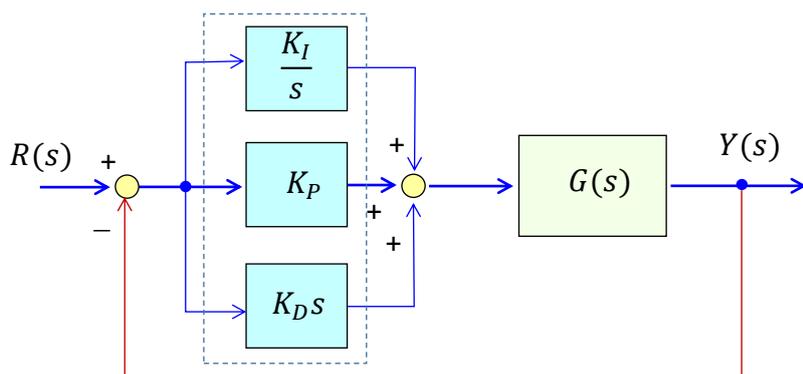


図 4.9 PID フィードバック制御のブロックダイアグラム

4.4 トランジスタ

トランジスタは, OP アンプをブレイクダウンして, 増幅作用を示す素子の最小単位としたものと考えることができる. 大別して, pn 接合を使い, キャリア拡散現象を用いて増幅作用を生じさせる 2 極性接合トランジスタ (bipolar junction transistor, BJT) と, 電場によるキャリアの増減現象を用いて増幅作用を持たせる電場効果トランジスタ (field effect transistor, FET) とに分類される.

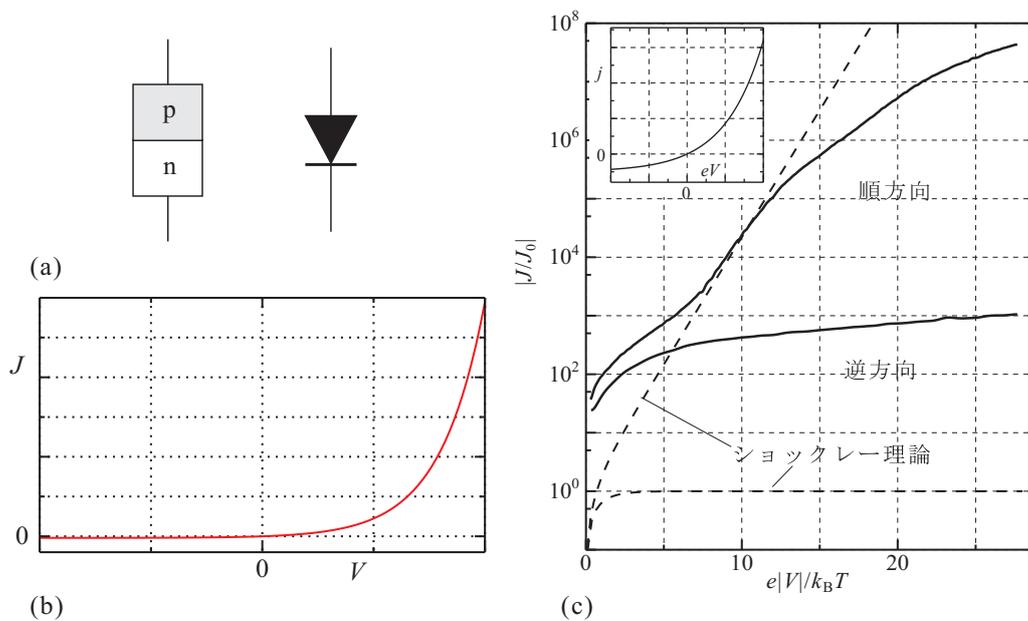


図 4.10 (a) pn 接合ダイオードの模式図 (左) と対応する回路記号. (b) 線形目盛りでプロットした模式的電流電圧特性. p 側を正極に取っている. (c) 電流側を対数目盛でプロットした電流電圧特性. 挿入図中実線および図中に「ショックレー理論」と示した破線は, (4.21) を示したものの.

これらの個別素子になると, 非線形性が強くなり, 扱いに素子の個性に沿った工夫が必要となる. 「線形近似する」ということが取り扱いの基本になる. 最終的には精度の高い線形応答を得るため, 帰還回路を用いることが必須である.

4.4.1 ダイオード

特にバイポーラ (2 極性) 接合トランジスタ動作を理解するための基礎としてダイオードを扱う. ダイオードは 2 端子の素子で, 電流電圧特性がゼロ電圧に対し非対称である. 最も多いタイプは図 4.10(b) のように, 一方向にはある電圧から電流が増加し, 電圧とともに微分抵抗 (dV/dJ) が減少する.

pn 接合ダイオードについて簡単に説明する. 半導体の伝導の型には, キャリアの正負 (正孔, 電子) により, p, n 型がある. pn 接合はこれを何らかの方法で貼りあわせるような形状にしたものである. pn 接合ダイオードは, 図 4.10(a) のように, この両型からそれぞれ電極を引き出した形をしており, pn の方向に合わせて図 4.10(a) 右側のような回路記号を使用する. p 側の正孔にとっては n 側は一種の真空, n 側の電子にとっては p 側がそうであるから, 熱力学的にエントロピー S の大きな方向へ遷移しようとして互いに拡散しようとする (拡散電流). ところがこの過程は電気的中性条件を破って pn 界面に電場を発生させ, 内部エネルギー U を増加させる. 結局自由エネルギー $U - TS$ が最小になる点で平衡が生じる. 従ってダイオードにゼロ電圧印加状態でも pn 界面には電位が発生している*1. この電場 (電位差) を作り付けの電場 (電圧) (built-in field, built-in potential) と呼ぶ.

作り付けの電圧を打ち消すように p 側に正の電圧を印加すると, この外部電場の後押しされて正孔 → n 側, 電子 → p 側という拡散過程が生じ電流が流れる. 逆向きの外部電場は接合面で拡散を抑えている作り付け電場を更に強くする方向であり, 電流はこれに強く抑えられてしまう. 以上によって, 図 4.10(b) のような非対称な電流電圧特性が得られる. 詳細は半導体の講義あるいは成書類にゆずるが, 最も簡単なショックレーの理論では, 電流電圧特性は,

$$J(V) = J_0 \left[\exp \left(\frac{eV}{k_B T} \right) - 1 \right] \quad (4.21)$$

*1 一般に我々が回路上で「電圧」と呼んでいるのは, 「電気化学ポテンシャル差」のことである. 従って有限電位差があってもダイオードにかかっている電圧はゼロと呼び, 現実的には金属端子を接触した際に半導体-金属接合部に逆向きの電場が生じて端子間の電圧は実際ゼロとなる.

という形に書かれる。

式 (4.21) を見て、電流が流れ始める特別な閾値のようなものがないことに気付くであろう。(4.21) は簡単すぎる近似であるが、図 4.10(c) に実線で示したデータのように、実際の電流電圧特性の小電圧での特徴を多くの場合良く捉えている。係数 J_0 にバンドギャップ、 p , n ドーピング濃度のようなパラメーターは入っているが、これらによって見た目に現れる閾値風の値は特性を見ているスケールの問題である。(4.21) に使用されている近似で一番の問題は、正孔と電子の分布をマックスウェル分布で近似している点で、空乏領域と呼ばれるキャリア密度が大変低い状態では非常に良い近似であるが、高濃度にドーブされた層内では必ずしも成立しない。

ダイオードの電流がより流れる方向の電圧を順方向電圧 (forward bias voltage), 流れない方向を逆方向電圧 (reverse bias voltage) と呼ぶ。うえの説明でわかるように、順方向に電圧が印加されている場合、 p 型から正孔が n 領域へ、 n 型から電子が p 領域へ拡散している。これを少数キャリア注入 (minority carrier injection) 現象という。類似の現象は光による励起によっても生じ、太陽電池が流し出す光電流はこの少数キャリア注入現象によるものである。

ダイオードは pn 接合によるものとは限らず、金属-半導体接合によるショットキー障壁ダイオードなども存在する。また、逆方向電圧を大きくしていくと、決まった電圧で急激に電流が流れだす、ツェナートンネル (Zener tunneling) 現象生じる場合があり、これを安定な定電圧電源として用いる場合もある (ツェナー・ダイオード)。

4.4.2 バイポーラトランジスタ

静特性

最も基本的な pn 接合型トランジスタは伝導の異なる層を 3 層重ねた構造を持っており、 nnp 型と pnp 型が存在する。この 3 層から取り出した電極を、図 4.11 のように順にエミッタ (E), ベース (B), コレクタ (C) と称する。半導体の半古典的伝導理論の確立とこれに立脚した接合トランジスタの提案・実証は、現代の情報社会の基礎となった業績と言っても過言ではなく、1956 年のノーベル物理学賞の対象ともなっている。物理学専攻の皆さんにはぜひその内容を知り、物理を味わっていただきたいが、本講義ではとてもそのような時間がなく、大学院での半導体の講義に譲る。特に、早く知りたい方へ：講師は 2013 年の半導体の講義でこれについては一通り述べているので、その講義ノートを参照していただきたい (第 6 回の pn 接合を知った上で第 8 回の接合トランジスタに進むと良い。関心がある方は第 7 回の太陽電池の話も参考になる)。

まず、静特性と呼ばれる電流電圧特性を見よう。端子が 3 つあり、図 4.11(a) のようにそれぞれに流れ込む (エミッタについては流れ出る方向に電流を取る) 電流が考えられ、キルヒホッフの法則より

$$J_E = J_C + J_B \quad (4.22)$$

である。すなわち電流の自由度が 2 で、同様に電圧の自由度も 2 ある。このため静特性 (電流電圧特性) を 2 次元平面で完全に表現することは困難である。

多く使用される静特性の描き方を図 4.12 に示した。今、エミッタを開放 ($J_E = 0$) してベースとコレクタの間の IV 特性を見ると、これは pn 接合ダイオードであるから、図 4.12(a) の破線のようなになる。コレクタを開放 ($J_C = 0$) した場合はベースとエミッタの間の IV 特性も同様である。ベースを開放 ($J_B = 0$) すると、コレクター-エミッタ間

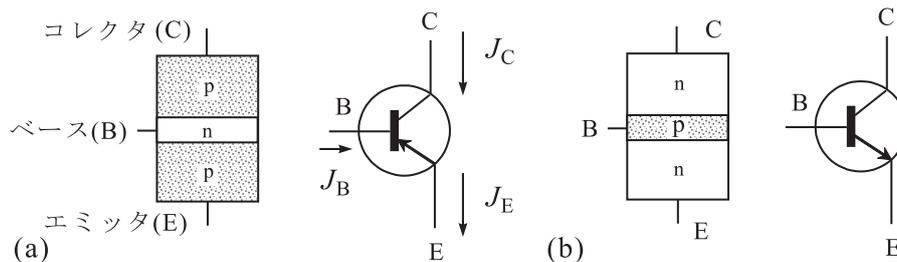


図 4.11 バイポーラトランジスタの模式図と回路記号。(a) PNP 型, (b) NPN 型。

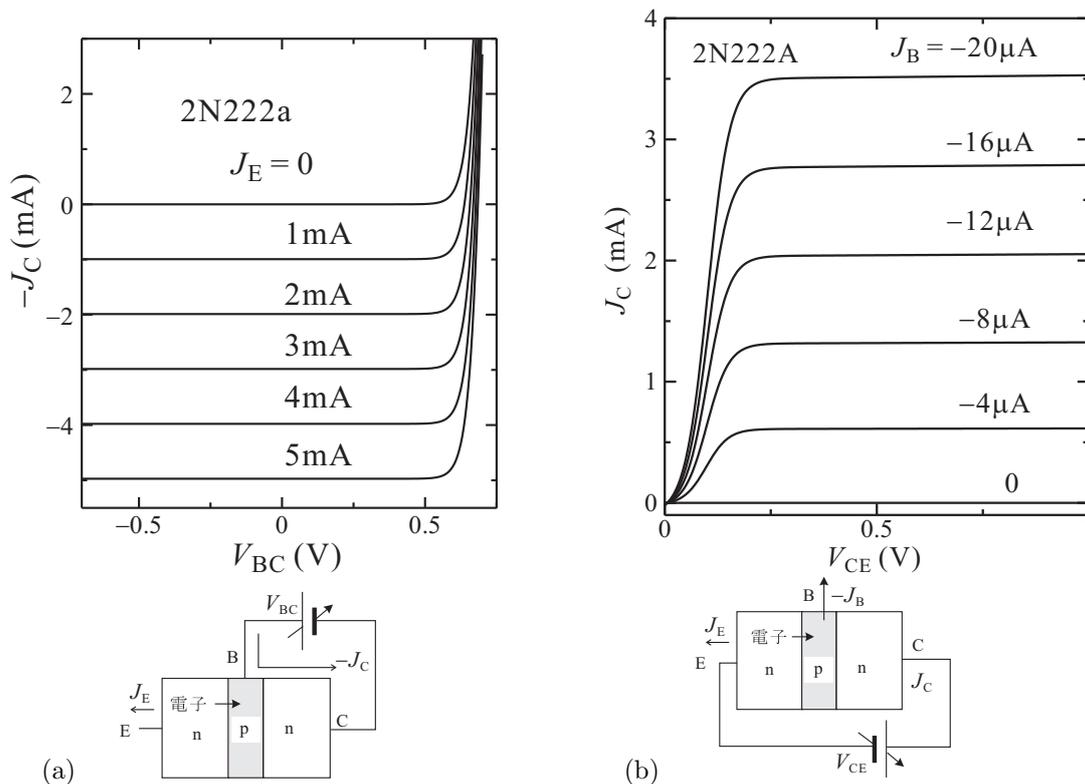


図 4.12 (a) 下図に示したような実験回路で、 V_{BC} を変化させてコレクタに流れる電流 (の符号を反転したものを) を測定した。ベース-コレクタのダイオード特性。エミッタからベースへ電子を注入するに従い、太陽電池の光起電力に類似の特性となる。(b) コレクタ-エミッタに電圧 V_{CE} を加えても、接合の片側が逆方向バイアスとなるため電流はほとんど流れない。が、ベースを電流バイアスすると、電流値に応じてコレクタ電流が飽和する形で電流が流れる。

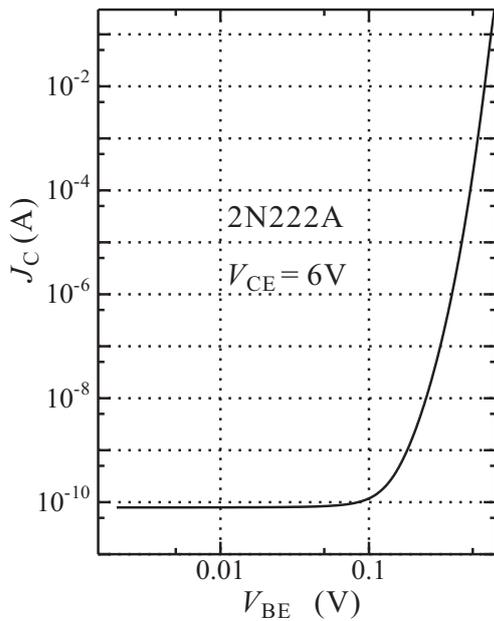
では、どの電圧でも 2 つの pn 接合のどちらかが逆方向になるため、電流はほとんど流れない。ここで、ベース-エミッタ間にも定電圧電源を接続してこの pn 接合を順方向にバイアスすると、図 4.12(b) のように J_B の増加に伴って J_C が流れ始める。そこで、 J_E がある程度流れるようにベース-エミッタ電圧 V_{BE} を一定に保ってベース-コレクタ間の IV 特性をみると、図 4.12(a) の実線群のように先ほどの破線を下方に平行移動したような格好になっている。逆バイアス電圧でも大きな電流が流れており、この領域だけを見ていると、あたかも定電流源のようである*2。

以上から、 J_B は J_C や J_E に比べて小さいとして無視してしまえば、トランジスタの最もプリミティブな増幅作用として、 V_{BE} の変化を J_C の変化に変換するもの、と考えることができる。ところが、図 4.13(a) のように、 V_{BE} に対する J_C の変化は非線型で大変扱いにくい。ところが幸いなことに、図 4.13(b) に示したように、 J_C はほぼ J_B に比例している。これは、結局 E→B へと注入された少数キャリアが、拡散によって流れるため、ほとんどベース電極に吸収されることなく、コレクタへ到達してしまうためである。従って電圧駆動する代りにベースを電流駆動し、電流増幅素子と考えれば、線形な増幅器として扱える。この時直流電流増幅率 h_{FE} は

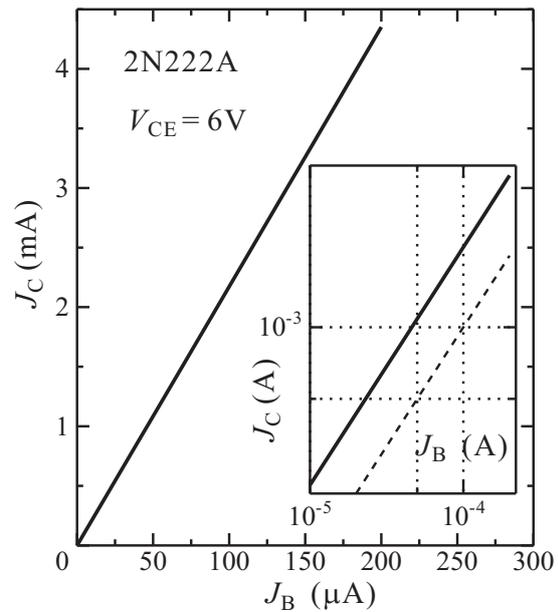
$$J_C = h_{FE} J_B \quad (4.23)$$

で定義される。 h_{FE} は用途によって大きく異なり、ダーリントン接続を使わないもので、10 から 1000 を超えるものまである。

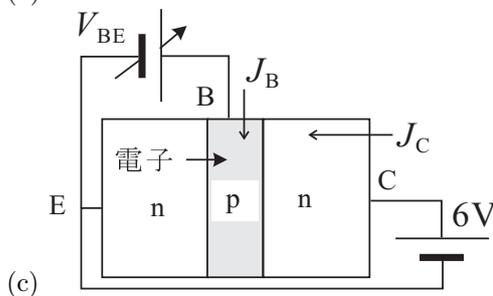
*2 太陽電池は 2 端子 pn 接合ダイオードであるが、光が当たっているとこれとそっくりな IV 特性を示す。この場合、光がエミッタの代りに少数キャリアを注入しているのである。



(a)



(b)



(c)

図 4.13 (c) のような実験回路で測定したトランジスタの特性. (a) コレクタ-エミッタをバイアスして、ベース-エミッタ間を順方向にバイアスしていくと、 V_{BE} に対して非常に敏感に J_C が変化する. (b) これを J_B と J_C 間の関係と考えると、(同一ダイオードの特性を見ているのと同じであるから) 非常に線形性が良くなる. 挿入図は両対数プロットで、破線は傾き 1 を表している.

バイポーラートランジスタの線形近似

バイポーラートランジスタを使いこなすには知るべきことが非常に沢山あり、とても本講義で紹介しきれないので、ここではまず粗く線形近似を行い、次に負帰還回路を用いて非線形性を抑える手法の例を示すことにする.

4 端子回路における、H 行列 (ハイブリッド行列) は次のように定義される.

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

これは、入力電流と出力電圧を与えると、入力電圧と出力電流が与えられるという変わった形をしているが、トランジスタの増幅作用を扱うにはこのパラメタが便利である. ただし、トランジスタ回路を扱う際にはこれをそのまま適用するのではなく、狭い電流電圧領域に限定し、その近傍で線形近似を行う. このバイアス付き小振幅信号についての H 行列は、小文字の h を使用することが多く、その要素 h_{ij} は h パラメタと呼ばれる.

図 4.14(b) のように、エミッタ接地回路を 4 端子回路とみなす. すると、まず (4.23) の関係を認めると $h_{21} = h_{FE}$ である. その他の関係については、上述のように IV 特性を局所線形近似して求める. トランジスタの特性表示においては h パラメタについて、次のような慣用表示が使われる.

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ j_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i & h_r \\ h_f & h_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

ここで v, j など小文字にしたのは、絶対値ではなく、小さな変化分 (交流小信号) という意味である. また、E, B, C をそれぞれ接地した場合の 4 端子回路に対応して、 $h_i \sim h_o$ にもう一つ e, b, c という添え字をつける. この慣用記法では (4.23) の関係を認めると $h_{21} = h_{FE} = h_{fe}$ となる. ただし (4.23) は近似であり、一般には h_{FE} は h_{fe} とは異なる. 図 4.14(c) にエミッタ接地の場合にこれらの h パラメタが動作点によって変化する様子を示した. 他のパラ

メタが I_C によって大きく変化するのに対して、 h_{fe} はほぼ一定で、これがトランジスタをリニアに使うのに良い見方であることがわかる。

以上を、図 4.15(a) の増幅回路の小信号特性の計算で実行してみよう。ここで注意することは、交流成分だけ考える、ということである。この時最も粗いやり方としてコンデンサはすべて短絡と考えるというものがある。これを採用すると、入出力のコンデンサはすべて短絡、また電源ラインも図から C_d により接地されてしまっていることになる。最も、直流の電源ラインは理想的には、内部抵抗零で、直流起電力を介して接地されているから、 C_d がなくても交流的には常に接地と扱える。 R_1, R_2 はベースの動作点電圧 (バイアス電圧) を決めるための重要な抵抗であるが、これもこの近似では単なる並列抵抗になってしまう。これらの働きについては、やはり次副節の直流バイアスの項で触れる。以上より図 4.15(b) のような非常に簡単な等価回路に書き換えることができる。

入力端子に交流電圧信号 v_i が加えられたとする。キルヒホッフの法則より

$$\left. \begin{aligned} v_i &= h_{ie}j_b + R_E(j_b + h_{fe}j_b) \\ v_o &= h_{fe}j_b R_C \end{aligned} \right\}$$

となるので、電圧利得 A は

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{h_{fe}R_C}{h_{ie} + R_E(1 + h_{fe})} \quad (4.26)$$

となる。 $h_{fe} \gg 1$ であれば $A = R_C/R_E$ となり、 h_{fe} によらない形となる。これは、負帰還の効果である。入力インピーダンス Z_i は、 R_1, R_2 とその右側のインピーダンス Z'_i の並列インピーダンスである。 Z'_i は

$$Z'_i = \frac{v_i}{j_b} = \frac{h_{ie}j_b + R_E(j_b + h_{fe}j_b)}{j_b} = h_{ie} + R_E(1 + h_{fe}) \quad (4.27)$$

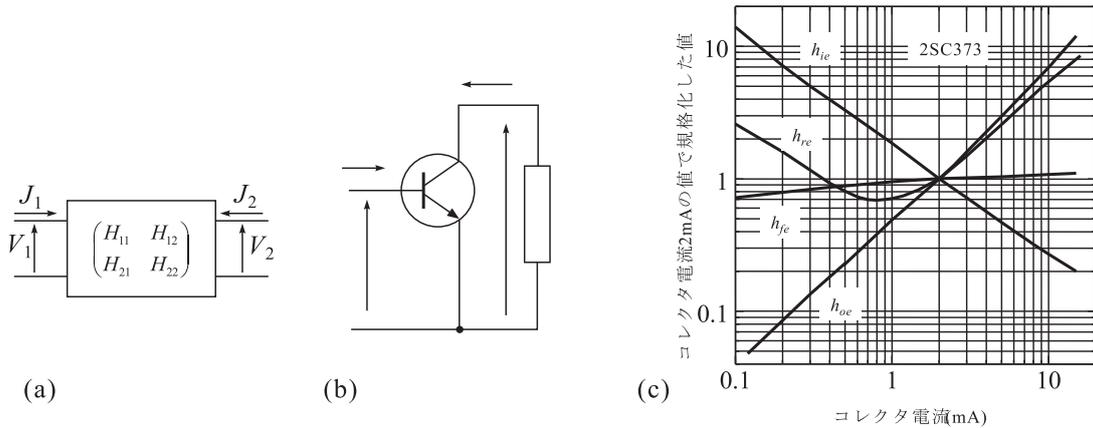


図 4.14 (a) 4 端子回路と H (ハイブリッド) 行列. (b) エミッタ接地回路を 4 端子回路と見る. (c) npn 型トランジスタ 2SC373 の h パラメタがコレクタ電流に依存する様子を示したもの.

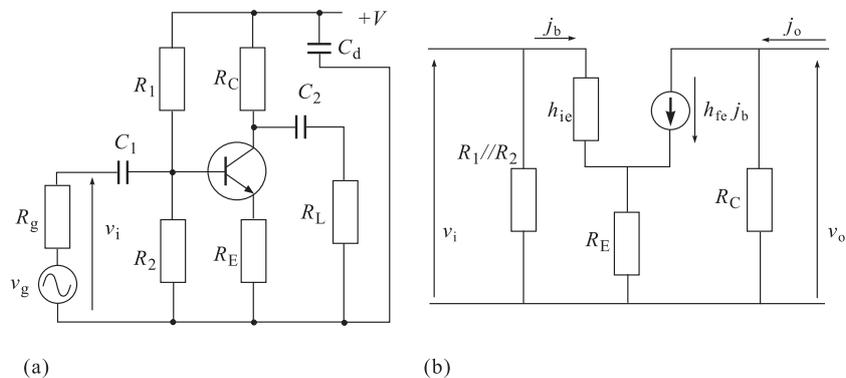


図 4.15 (a) エミッタ接地増幅回路. 周辺抵抗等略さずに描いたもの. (b) (a) の回路を線形化したモデル.

と求まる。また出力インピーダンス Z_o は

$$Z_o = \frac{v_o}{j_o} = \frac{h_{fe} j_b R_C}{j_b} = R_C \quad (4.28)$$

である。h パラメタはトランジスタのデータシートに記載されているので、諸特性量を簡単に計算できる。

4.5 電場効果トランジスタ

電界 (電場) 効果トランジスタ (field effect transistor, FET) には、pn 接合型 FET (JFET)、MOS (metal-Oxide-Semiconductor) 型 FET、MESFET (ショットキ型 FET) や HEMT (高電子移動度 FET) などがある。いずれも、電場によって電流経路の伝導度を制御する、単純な原理によるもので、電圧増幅型のデバイスである。制御法に、デプレッション型とエンハンスメント型があり、更にキャリアの種類によって p チャネル型と n チャネル型に分かれる。このことから、バイポーラトランジスタに対して、FET をユニポーラトランジスタと呼ぶこともある。MOSFET を用いたスイッチング回路はこの 20 年ですっかり論理集積回路を席卷し、我々の情報生活はほとんど MOSFET の上に成り立っているといっても過言ではないくらいであるが、ここでは、増幅回路について議論する。

FET はソース (S)、ドレイン (D)、ゲート (G) の端子を持つ 3 端子素子であり、G で制御電場を与え、S, D 間の伝導度を制御する。最も簡単な FET の回路記号は、図 4.16(a) である。S, D には元来明確な区別がなく、特に JFET の場合は、S, D を反転して接続しても、大抵は問題なく動作する。MESFET や HEMT も同様である。一方 MOSFET は半導体基板に対して S が接続されていることが多く、一般には反転できない。この事情と、伝導キャリアの種類 (n チャネル, p チャネル) を反映させた回路記号が図 4.16(b)~(e) である。

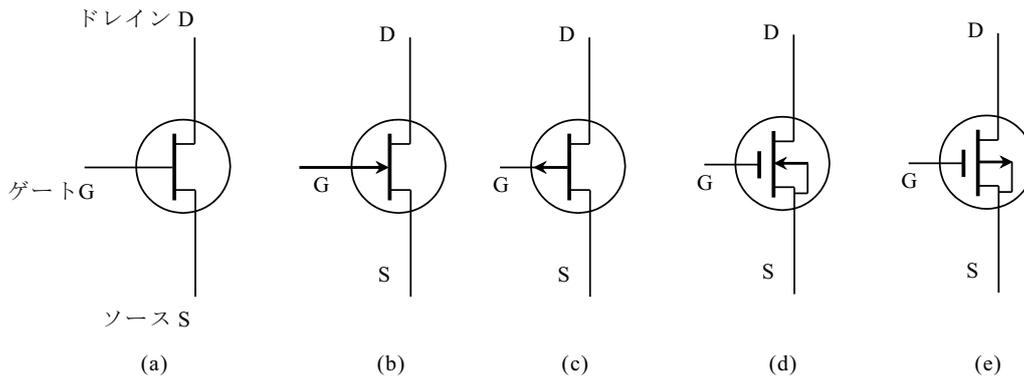


図 4.16 FET の様々な回路記号

JFET では pn 接合の逆方向電圧を使ってゲート電場を発生する。したがってゲート電流はこの pn 接合の漏れ電流であり、極めて小さく nA 以下である。G を入力端子とした時の入力インピーダンス Z_{in} は極めて高く、 $10^8 \sim 10^{12} \Omega$ になる。絶縁ゲートの MOSFET の場合、ゲート電流は絶縁膜のリーク電流であるから、更に小さく、pA のオーダーになり、 Z_{in} は $10^{12} \sim 10^{14} \Omega$ に達する。

4.5.1 FET の静特性

JFET

図 4.17(a), (b) に代表的な JFET (n チャネル) の静特性を示す。JFET はすべてデプレッション特性を示す。即ち、ゲート-ソース電圧 V_{GS} が 0 の時、ドレイン-ソース電圧 V_{DS} を加えると有限のドレイン電流 J_D が流れ (ノーマリ・オン)、 V_{GS} に負電圧を加えるにつれて J_D は小さくなり、 $V_{GS} = V_P$ (ピンチオフ電圧) で流れなくなる。一方、ピンチオフしていない状態で V_{DS} を増やしていくと、小さな V_{DS} に対してはオーミックな特性を示すが、やがて飽和して、 J_D は V_{GS} で決まる一定値を示すようになる。即ち、一種の電流制限が起こる。結局、 $V_{GS} = 0$ に対する J_D が、動作領域 ($V_{GS} \leq 0$) では最大となりこれをドレイン飽和電流と呼び J_{DS} と記す。なお、 V_{GS} を正にすると

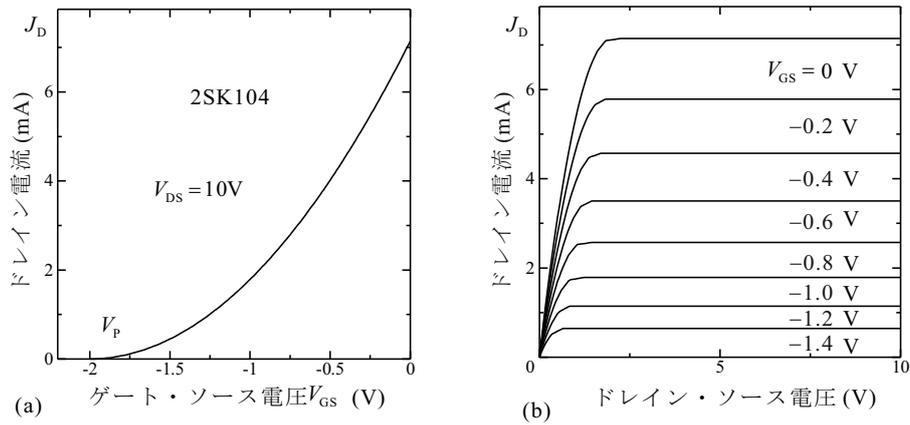


図 4.17 接合 FET の代表的静特性. (a) ソースドレイン電圧 V_{DS} を固定してゲート電圧を掃引した時のドレイン電流. (b) ゲート電圧をパラメタとし, V_{DS} を掃引した時のドレイン電流.

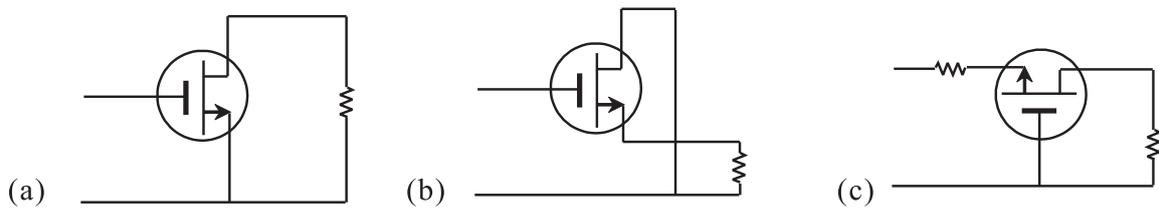


図 4.18 FET 回路の接地端子による分類. (a) ソース接地, (b) ドレイン接地, (c) ゲート接地

ゲート電流が増加して動作特性が悪くなるので, この領域は考えない.

p チャネルの JFET の場合は, V_{GS} , V_p , J_D , J_{DS} の符号をすべて n チャネルのものに対して反転すれば, 同様のことが成り立つ.

4.5.1.1 MOSFET

MOSFET は先に述べたような特徴があるが, JFET と大きく違うのは, エンハンスメント型がある, ということである. まず, デプレッション型については, V_{GS} が 0 をまたいで印加できる, という点を除いて JFET の場合と定性的に同じである. ノーマリ・オンであることから, スイッチング回路などには使いにくい. 一方, バイアスをとるのは楽になるため, 高周波用の FET にはデプレッション型が良く使用される.

一方, エンハンスメント型の場合, $V_{GS} = 0$ では J_D は流れず (ノーマリ・オフ), 図 4.17(a) のように V_{GS} を増やすにつれて J_D が流れ出す (n チャネルの場合). このノーマリ・オフの特性はトランジスタの場合と同じであり, トランジスタ回路の置き換えが容易であること, また, CMOS などのスイッチを使った論理回路には使用しやすいことから, エンハンスメント型の MOSFET の方が全体として良く使用されている.

4.5.2 FET の線形近似

線形近似においては, 直流のバイアス条件は一旦忘れられてしまうため, JFET も MOSFET も同列に扱うことができる. 具体例としては一応 n チャネルの JFET を念頭に置くことにする.

前に述べたように, 動作領域の V_{GS} においては

$$\left. \begin{aligned} J_G &\simeq 0, \\ J_D &= f(V_G, V_D) \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

である.

FET の動作モデルとして図 4.18 に示した, ソース接地, ドレイン接地, ゲート接地の各回路が考えられる. まず,

Y パラメタ	Y_{11}	Y_{12}	Y_{21}	Y_{22}
ソース接地	0	0	g_m	r_d^{-1}
ドレイン接地	0	0	$-g_m$	$g_m + r_d^{-1}$
ゲート接地	$g_m + r_d^{-1}$	$-r_d^{-1}$	$-(g_m + r_d^{-1})$	r_d^{-1}

表 4.1 (a) ソース接地型, (b) ドレイン接地型, (c) ゲート接地型の各増幅回路の Y パラメタ.

ソース接地回路について考える. ここで, 関数 f についての局所線形近似を行う.

$$g_m \equiv \left(\frac{\partial J_D}{\partial V_{GS}} \right)_{V_D = \text{const.}}, \quad (4.30a)$$

$$r_d \equiv \left(\frac{\partial V_D}{\partial J_D} \right)_{V_{GS} = \text{const.}} \quad (4.30b)$$

ここで, g_m は伝達コンダクタンス, r_d はドレイン抵抗と呼ばれる. 局所線形近似は

$$j_d = g_m v_{gs} + \frac{v_d}{r_d} \quad (4.31)$$

と表される. j, v などと小文字になっているのはトランジスタの場合と同様, 微小変化の意である. この線形近似を例によって電流源を用いた等価回路で表すと, 図 4.19(a) のようになる. また

$$\mu \equiv r_d g_m \quad (4.32)$$

と定義し, μ を増幅率と呼んでいる.

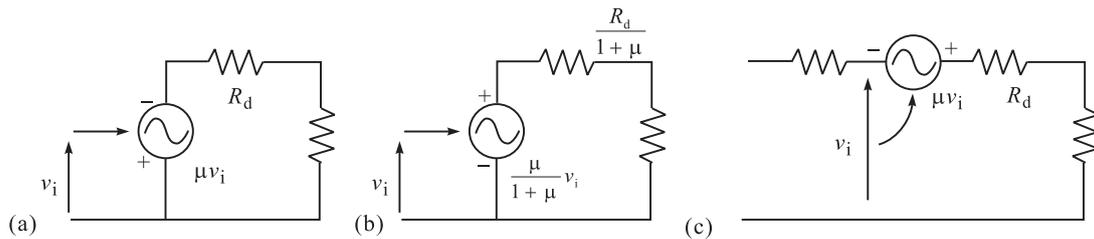


図 4.19 図 4.18 に示した FET の各接地回路に対する線形等価回路. (a) ソース接地, (b) ドレイン接地, (c) ゲート接地

次にこの等価回路を使って他の接地回路についても等価回路を導くことができる. 多少の変形を行うことで, (b),(c) の線形等価回路を得る.

FET は基本的には電圧入力であるので, 図 4.19 の各回路を 4 端子回路と見る場合には Y 行列を使うのが便利である. それぞれの接地回路についての Y パラメタを表 4.1 に示す.

参考文献

- [1] 土谷武士, 江上正「現代制御工学」(産業図書, 2000).
- [2] 岡村迪夫「OP アンプ回路の設計」(CQ 出版社, 1990).
- [3] 鈴木雅臣「トランジスタ回路の設計」(CQ 出版社, 1991).

物理屋のための電子回路論 第7回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年11月11日

第5章 分布定数回路

これまで、代表的な線形素子 (受動3素子, 線形増幅器) について見てきた。この時暗黙の了解事項としてきたのは、導線は各素子で生じる電磁場の変化を瞬時にとらえ、伝達する、各素子間の電磁場を通した相互作用は導線を通してのみ生じる、ということであった。従って、各素子で生じる電磁現象は局所的な電磁場に導線による境界条件が加わったものと考えることができた。処理対象とする信号の周波数が高くなってくると、対応する電磁波の波長も短くなり金属導線の「瞬時応答」は、良い近似とは言えなくなる。マイクロ波以上では信号伝送線路は3次元的な立体回路として認識する必要が生じる。実体的な立体回路と、抽象的ローカル電磁場を考える電子回路との間をつなぐ概念が分布定数回路 (distributed constant circuit) である。

5.1 伝送路

5.1.1 同軸ケーブル

高い周波数の信号は、電磁波として扱う必要がある。電磁波は空間を3次元的に拡散するから、信号を運ぶ電磁エネルギーの流れ (Poynting ベクトル) の減衰を極力抑えるためにも、電磁場を空間的に閉じ込め局在させることが求められる。電場を閉じ込めるために頻用されるのが、平行平板キャパシタのような金属の対極構造である。これを伝送路の形状に引き延ばしたものがマイクロストリップライン (strip line), 導波管 (waveguide), 同軸ケーブル (coaxial cable) などである。

同軸ケーブルは、GHz を超える高周波の伝送に使えるばかりではなく、低周波伝送においても対電磁ノイズ効果や漏洩電流低減効果が大きく、フレキシブルで扱いやすいことから広範囲に使用されている。図 5.1(a) のように芯線を誘電体のチューブ、円筒状の網線、場合によっては箔状の金属、被覆絶縁体の順に円筒状に配置したものである。

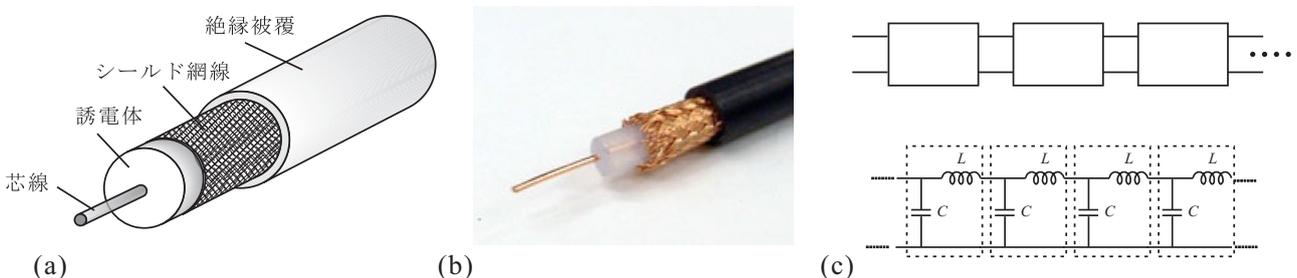
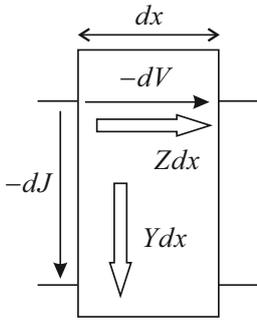


図 5.1 (a) 同軸ケーブルの模式図。切断点から内部構造を順に引き出した見取り図。(b) 実際のコ軸ケーブルで (a) のようなことを行ってみた写真。ケーブル型番 RG59/U。外径は 6.2mm。特性インピーダンス (後述) は 73Ω 。オヤイデ電気 web page より。(c) 同軸ケーブルを表すための分布定数回路の離散表現。上: 4端子回路のカスケード接続。下: インダクタとキャパシタによる最も簡単なモデル。



このように長く伸びた構造を，回路図の言葉で表現（近似）するために考えられたのが分布定数回路（distributed constant circuit）である*1．一つの考え方は，図 5.1(c) のように 4 端子回路を多数カスケード接続し，全体として長く伸びた部品を表現しようというものである．最も簡単には，図のように，インダクタ L とキャパシタ C で表現する． C は芯線と筒状シールドとの間の容量を表したものであることは明らかである． L は芯線とシールドの持つ自己インダクタンスを表している．芯線に電流を流すと Biot-Savart の法則によって周囲に磁場が生じ，シールドについても同様である．電流が速く変化しようとするとき，この磁場の変化がこれを妨げる方向に起電力を生じ，インダクタンスとして働く．

分布定数回路の考え方では，この 4 端子回路を短くした極限を考え，左図のように伝導船方向の「無限小長さ」 dx の 4 端子回路の無限カスケード回路と考える．流れる電流を J ，芯線と被覆導体の間の電圧を V とすると，この dx 進む間に，電流 dJ がアドミタンス Ydx を通してグラウンドへ流れ，また，インピダンス Zdx を通して dV だけの電圧降下が生じる． Z, Y はそれぞれ単位長さ当たりのインピダンス，アドミタンスである．すなわち，この「無限小 4 端子回路」について

$$dV = -JZdx, \quad dJ = -VYdx \quad (5.1)$$

となる．これはそのまま連立微分方程式と考えることができ，単一関数の形に書き直すと

$$\frac{d^2 J}{dx^2} = YZJ, \quad (5.2a)$$

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = YZV \quad (5.2b)$$

という波動方程式になる．これを電信方程式（telegraphic equation），線路方程式（lineman's equation）などと呼ぶこともある．

$$\kappa \equiv \sqrt{YZ} \quad (5.3)$$

とおけば（ κ は一般に複素数）， $x = 0$ での J, V を $J(0, t), V(0, t)$ として

$$J = J(0, t) \exp(\pm \kappa x), \quad V = V(0, t) \exp(\pm \kappa x) \quad (5.4)$$

である．ここで，時間に対して変化する成分のみ考えると，(5.4) を (5.2a) へ代入して

$$\frac{V}{J} = \mp \frac{Z}{\kappa} = \mp \sqrt{\frac{Z}{Y}} \quad (5.5)$$

となる．これをこの伝送線の特性インピダンス（characteristic impedance）と呼ぶ． $J(0, t) = J_0 \exp i\omega t$, $V(0, t) = V_0 \exp i\omega t$ と，角周波数 ω の成分を考えると， $\exp(-\kappa x)$ のかかったものが， x 方向への進行波， $\exp(\kappa x)$ のものが $-x$ 方向への進行波を表している．

Maxwell 理論で考えた電磁波の伝播との関係を調べよう．以下，誘電体の誘電率を $\epsilon (= \epsilon_r \epsilon_0)$ (ϵ_r は比誘電率)，透磁率を $\mu (= \mu_r \mu_0)$ (μ_r は非透磁率だが通常の誘電体ではほとんど 1) とする．ケーブルの方向を z におき直し，電磁場を

$$E = E_0(x, y) e^{i\omega t - \gamma z}, \quad H = H_0(x, y) e^{i\omega t - \gamma z} \quad (5.6)$$

のように置く [2]．Maxwell 方程式に代入して少し計算することで次が得られる．

$$\begin{aligned} (\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2) \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\gamma \partial_x & -i\omega \mu \partial_y \\ -\gamma \partial_y & i\omega \mu \partial_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix}, \\ (\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2) \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\omega \mu \partial_y & -\gamma \partial_x \\ -i\omega \mu \partial_x & -\gamma \partial_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_z \\ H_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

*1 考案したのは，かの Oliver Heaviside (1850 ~ 1925) である，ということである [1]．

ここで、TEM (transverse electric and magnetic) モード、すなわち、 $E_z = H_z = 0$ を考えると、(5.7) の右辺はすべてゼロになってしまうので、電磁場が有限であるためには

$$\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2 = 0 \quad \therefore \gamma = \pm i\omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (5.8)$$

である。波動の伝播速度は

$$v = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (5.9)$$

となる。

このような場合、元の Maxwell 方程式に戻ると、 $\text{rot}_{xy} \mathbf{H} = 0$ 、 $\text{rot}_{xy} \mathbf{E} = 0$ であるから、ポテンシャル \mathcal{U} 、 \mathcal{V} を使って

$$\mathbf{E} = \nabla_{xy} \mathcal{U} / \sqrt{\epsilon}, \quad \mathbf{H} = \nabla_{xy} \mathcal{V} / \sqrt{\mu} \quad (5.10)$$

と書ける。同様に

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_y, \quad E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x$$

であるから、

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \quad (5.11)$$

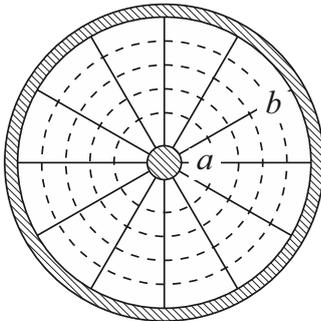
と、 $f(w) = \mathcal{U} + i\mathcal{V}$ が $w = x + iy$ の解析関数であるための Cauchy-Riemann 条件が満たされている。これより、 z 軸に垂直な断面の電磁場は、2次元の静電場同様、複素関数論を駆使して求めることができる。

z 方向に流れる電流 J を与えれば、上記電磁場が決まり、ポテンシャル \mathcal{U} (の相対値) も定まる。同軸ケーブルの断面を考え、芯線表面、シールド面表面のポテンシャルをそれぞれ \mathcal{U}_a 、 \mathcal{U}_b と置くと、電位差に相当する量は $(\mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b) / \sqrt{\epsilon}$ であるから、インピダンス Z_0 が

$$Z_0 = \frac{\mathcal{U}_a - \mathcal{U}_b}{J \sqrt{\epsilon}} \quad (5.12)$$

のように決まる。以上のように特性インピダンスを定めれば、分布定数回路法は Maxwell 理論と等価である。

同軸ケーブルについて、 Z_0 を計算してみる。芯線が単位長さあたり q の電荷で帯電しているとして、単位長さあたりの静電容量 C を求める。 r 位置での電場は Gauss の定理より $q / (2\pi \epsilon r)$ であるから、



$$V = \frac{q}{\epsilon} \int_a^b \frac{dr}{2\pi r} = \frac{q}{2\pi \epsilon} \log \frac{b}{a} = \frac{q}{C}$$

$$\therefore C = \frac{2\pi \epsilon}{\log(b/a)} \quad (5.13)$$

次に、芯線の電流を J と置く。シールドには (逆向きの) 電流 $-J$ が流れている。芯線自身、シールド自身も自己インダクタンスを持つが、ここでは誘電体部分のみ

を考える。ここでは、 r よりもケーブルの内側を流れる全電流は J であるから、

$$H(r) = \frac{J}{2\pi r}, \quad B(r) = \frac{\mu J}{2\pi r}$$

である。この部分の単位長さ断面の磁束 Φ は

$$\Phi = \int_a^b dr B(r) = \frac{\mu J}{2\pi} \log \frac{b}{a}$$

であるから、単位長さあたり自己インダクタンス L が

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log(b/a) \quad (5.14)$$

と求められる。

(5.5) の特性インピーダンスは、損失のない L 、 C のリアクタンスのみのモデルでは $\sqrt{L/C}$ であるから、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \log\left(\frac{b}{a}\right) \quad (5.15)$$

と求められる。

付録 E：物理実験で必要になるかもしれないトランジスタ回路

現在、OP アンプのような IC ですら実験家がいじる機会は減少しており、ディスクリート素子ともなると、講師の世代でもいじったことのない実験屋は結構いるかもしれない。が、既存回路にほんの少しディスクリート素子で「付け足し」をすることで、制御パラメタの範囲を広げたり、応答速度を速くしたりできる場合があり、このようなやり方がある、程度の知識は持っておいても損はない。

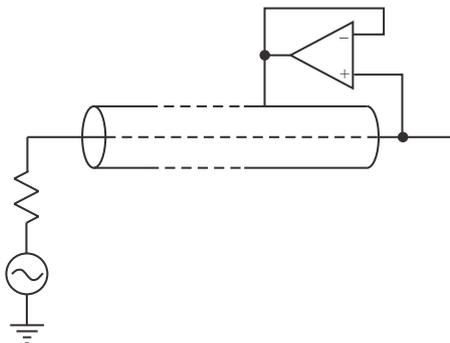
E1. 100% 負帰還，エミッターフォロワー

エミッター接地増幅回路の負帰還は、エミッター抵抗 R_E (この抵抗器を入力ベース電流 j_B と出力コレクター電流 $j_C = h_{fe} j_B$ の両方が流れている) によってもたらされている。そこで、この R_E から出力電圧を直接取り出すことを考える (図 5.2(a))。この時、電圧ゲインは、

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{j_B(1+h_{fe})(R_E \parallel R_o)}{j_B[h_{ie} + (1+h_{fe})(R_E \parallel R_o)]} \approx 1 \quad (h_{fe} \gg 1) \quad (E.1)$$

となり、ほぼ 0dB、すなわち電圧ゲインはない。しかし、結果が R_o によらないことからわかるように、出力インピーダンスが大変小さくなっており、電流増幅を反映して大きな電流を取り出せるようになっている。この回路は、エミッターフォロワー (emitter follower) として良く知られており、インピーダンス変換 (impedance conversion) を行っていると見ることができる。

これは、負帰還回路のゲインの式 (4.3) で、 $h(s) = 1$ としたことに相当し、出力をそのまま入力に戻す 100% の負帰還を行っていることに相当する。一般に、開ループゲイン A の増幅器を用いて 100% 負帰還を行った場合、実効出力インピーダンスは入力端子につないだ実効入力インピーダンスの $1/A$ になる。同様なことは、OP アンプを用いて行うことができ、図 5.2(c) のように - 入力に出力をそのまま戻す。 $|A|$ が非常に大きいので、実効出力インピーダンスを極めて低くすることができる。実際に使用する場合の注意点は、フィードバックを受け取る側の入力インピーダンスが極めて高いため、負荷側のインピーダンス次第で $h(s)$ に位相回りが生じる可能性がある点である。この時、 $|h(s)\Xi(s)| \approx |\Xi(s)|$ でフィードバック絶対値が極めて大きいことから、ナイキストの判定条件で不安定側に振れる可能性が高くなる。このように、エミッターフォロワー、OP アンプの電圧フォロワーは発振する可能性の高い回路として知られており、様々なインピーダンスがつながれる可能性がある測定回路では特に注意が必要である。



このような注意を払った上で、測定の質を上げる可能性のある回路の例として、左図のドリブン・シールド (driven shield, あるいは active shield) を挙げておこう。物理実験 (に限らず、多くの実験において) では、信号源となる実験対象と測定装置の距離をどうしても取らざるを得ない場合がたびたびある。このような時、配線が雑音を拾うのを防ぐため 2 者の間を同軸ケーブル (次章で説明) その他のシールドケーブルでつなぐのがふつうである。信号線である芯線と被覆のシールドの間にはこの距離のためにより大きな静電容量 C_s が存在することになる。シールドを接地すると、信号源は信号電圧の変化に応じてこの静電容量を帯電させる必要があり、信号源抵抗を R_s とするとその時定数は

$C_s R_s$ で応答が大変遅くなる。そこで、図のように、芯線に電圧フォロワーを接続しシールドを接地せずに電圧フォ

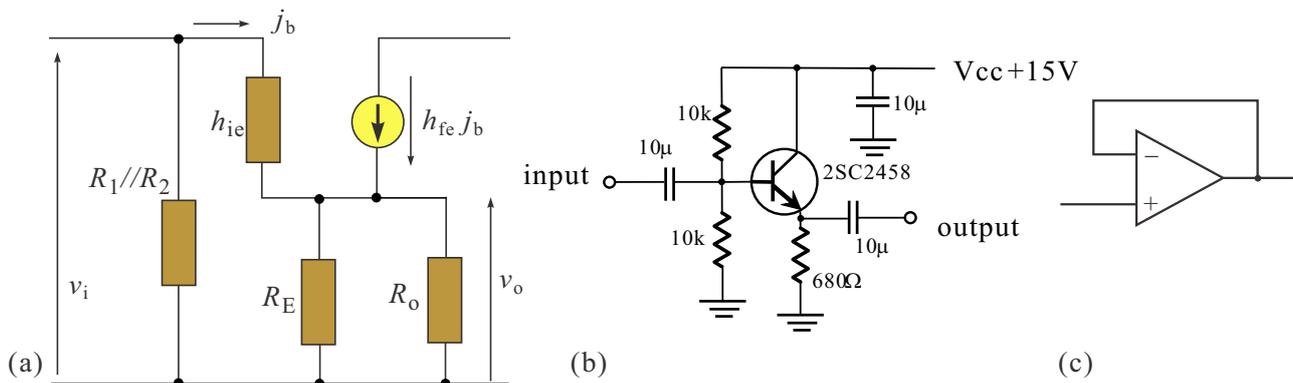


図 5.2 (a) エミッターフォロワー回路の小信号線形モデル (等価回路). (b) より現実に近い回路図例. (c) OP アンプを用いた電圧フォロワー.

ロー出力でシールド金属をドライブするようにする. シールド電位は仮想短絡によって芯線と同じになる. この時, シールド側から見ると信号源抵抗は OP アンプの開ループゲインを A として R_s/A と大変小さくなり, 時定数も $R_s C_s/A$ となって応答は極めて速くなる. また, 接地電位より高い電位で微小電流を測定しなければならない場合, 芯線とシールドが同電位なためリーク電流がなくなり正確な計測を行うことができる. 付録 D で紹介した計装アンプ IC には, 2つの入力端子に対してシールドをドライブするための端子を用意しているものもあるので, データシートを眺めてみると良い.

E2. コンプリメンタリ (相補) 関係

エミッターフォロワーであるが, 上記 E1 では npn トランジスタを例に出した. npn 型の場合, 電流増幅作用を得るためにはベースは常にエミッタよりも正側にバイアスしておくてはならない. このため, 正負に振れる信号を扱うためには入力がゼロでも常に有限のコレクタ電流 (アイドル電流) を流す必要があり, 処理可能な振幅領域はこのアイドル電流で制限される. この問題を回避する一つの方法が, npn トランジスタと pnp トランジスタを図 5.3(a) のように直列に接続し, + 側での電流制御を npn, - 側での制御を pnp が担当するようにするもので, プッシュプル (push-pull) 回路と呼ばれる. この場合, アイドル電流はほぼゼロにすることができる. ここで, 入力にダイオードが挿入されているのは, 入力がゼロを通過する際に, npn をオフして pnp をオンにする電圧が正負に分かれているため, ここでひずみが発生する (ゼロクロス歪) のを避けるためである.

ここで, もし npn 型と pnp 型とで h_{fe} などの特性が大きく食い違っていると, 単体トランジスタの $|h_{fe}| = \infty$ という近似は OP アンプの $|A| = \infty$ という近似に比べて大分悪いことから, + 側と - 側とで特性が変わって波形にひずみが生じる. このため, npn 型と pnp 型とで大体正負対称形になるようなトランジスタが用意されていることがある. このようなトランジスタ対のことをコンプリメンタリ対 (complementary pair) と呼ぶ. 図 5.3(a) の 2SC3668 と 2SA1428 はそのような例であり, コンプリメンタリ対が存在するようなトランジスタの場合, データシートにそのことが記載されている.

上で, OP アンプの $|A| = \infty$ という近似よりは悪いので, と言うことを述べた. また, ゼロクロス歪も完全に避けるにはダイオードの数を増やすなど, 色々工夫が必要となる. これに対して, OP アンプそのものを使うことで, これらの欠点を避けることができる. 図 5.3(b) のように, OP アンプ回路の出力部分にプッシュプルエミッターフォロワーを挿入する. OP アンプの巨大な開ループゲインを使うことで, トランジスタの特性の不揃いを補償することができ, OP アンプのスルーレートを超えるような入力でなければ入力のダイオードは省いてもゼロクロス歪は発生しない (図では速い入力への応答も考え残してある). OP アンプ回路としては, 高耐圧や大電流のトランジスタ素子をエミッターフォロワーに使用することで, 出力電圧・電流範囲を拡大できる, という大きなメリットがある.

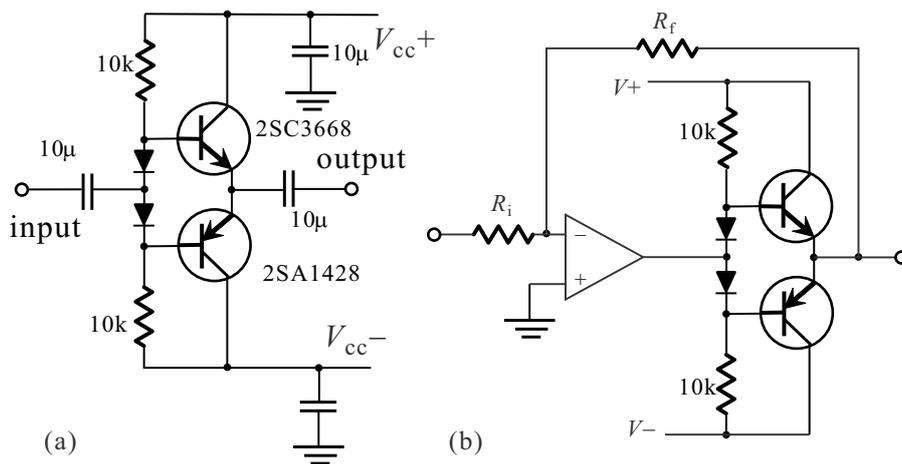


図 5.3 (a) コンプリメンタリーなトランジスタを用いたプッシュプル型のエミッターフォロワー回路. (b) (a) の回路を OP アンプの反転増幅器の出力へ挿入することで、出力可能な電圧電流範囲を広げる回路.

E3. 電流ミラー

物理実験で自ら設計・作製して使用することはまずないと思われるが、差動増幅回路に頻繁に使用される電流ミラー (current mirror) 回路について述べておく. これは, pnp トランジスタを用いる場合は, 図 5.4(a) のように, 正電源に適当な抵抗を介して 2 つのトランジスタのエミッタを接続し, ベースを共通に取った対称的な回路である. まず, 左側のトランジスタ Tr_1 を見ると, ベース-コレクタを同電位に取っているので, 下側の np 接合が短絡され 1 つの pn 接合と類似の特性になる (実際にはベース内を拡散してコレクタに到達する正孔が電流の大部分を担う). コレクタ-ベースの短絡点より下に流れ出す電流を J_1 とすると, ベースを経由する電流 J_B (これには右のトランジスタ Tr_2 から流れ出るベース電流も含まれている) は $J_B \ll J_1$ とすると, Tr_1 のエミッタ電位は $V^+ - J_1 R_1$ である. トランジスタ動作の項で述べたように, コレクタ電流はエミッタ-ベース間に印可されたフォワード電圧による少数キャリア注入によってほぼ決まっており, 一価関数である. そこで, その逆関数を $V_{EB} = V_{EB}(J_C)$ と書く*2. すると, Tr_1 のエミッタ-ベース電圧は $V_{EB}(J_1)$, ベース共通電位は $V^+ - J_1 R_1 - V_{EB}(J_1)$ である. 一方, Tr_2 のコレクタから流れ出る電流を J_2 とすると, ベース電位は $V^+ - J_2 R_1 - V_{EB}(J_2)$ である. これらのベース電位は共通であるから, $J_2 = J_1$ である.

以上から, 電流ミラー回路では, 境界条件によって J_1 が決まると, J_2 がこれと等しくなるように Tr_2 の条件が調整されることがわかる. すなわち, J_2 に対する定電流回路として働いている. 上流側で電流制限できる定電流回路は構成しにくいことが多いので, 貴重な回路とすることができる.

図 5.4(b) はこれを用いた差動増幅, 差動出力回路であり, OP アンプの入力回路は (実際にははるかに複雑な回路が使用されているが) 原理的にはこのような構成になっている. Tr_1a, Tr_1b は図 5.4(a) の電流ミラー回路である. ミラー回路は, Tr_2b に Tr_2a と同じコレクタ電流を流そうとする. ところが, これらのトランジスタは, エミッタが共通電位であり, ベースに入力 a, b に応じて異なる電圧が入力されると, V_{EB} が異なっているので違う電流を流そうとする. 綱引きになって困ったことになりそうだが, 実際には, コレクタ電流は V_{EB} だけではなく V_{CE} によっても (変化は小さいが) 変化する (アーリー効果, Early effect). この変化の仕方は幸い線形である. 従って, ベース入力電圧の差は非常に大きく増幅されてコレクタ電圧の差に現れる. 2.2.1 項の「電流源と電圧源」のところでも述べたように, 定電流源は出力インピーダンスが非常に大きな電源である. これは, 4.3.2 項で出てきたエミッタ接地増幅回路で負荷抵抗 R_L が非常に大きくなったことに相当し, したがって大きな電圧増幅度が得られるものである.

やや変則的な使い方であるが, トランジスタの増幅度を目いっぱい使う方法である.

*2 実際には下で見ると, J_C は V_{CE} にも影響される.

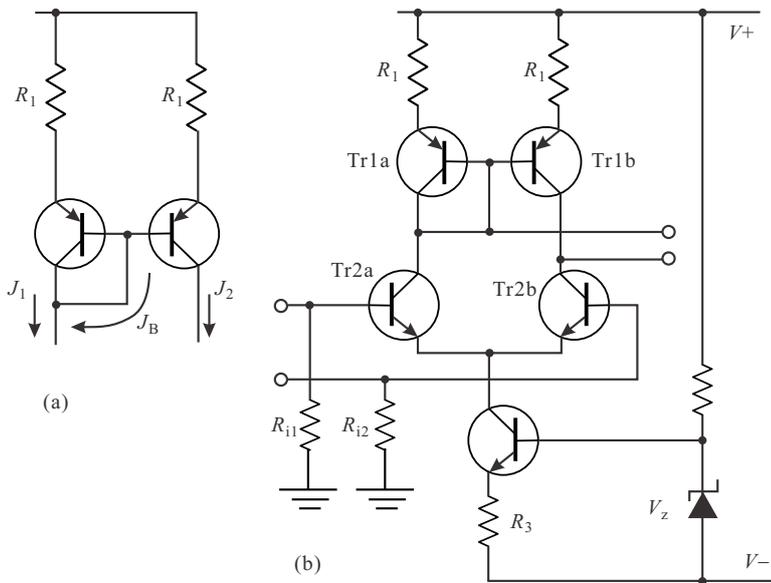


図 5.4 (a) 電流ミラー回路の原理図. (b) 左の電流ミラー回路を用いた差動入力差動出力回路. OP アンプの入力付近はこれと類似の回路が使用されている.

付録 F : 各種同軸ケーブルとコネクタ

高周波信号 (あるいは高周波を必然的に含むパルス信号) では、?? で見たように、特性インピーダンスの境界が信号の反射を起こすため、ケーブルの接続にも注意が必要になる。従って、コネクタの選択は、伝送線路 (ケーブル) の選定と同程度に重要である。

F1. 同軸ケーブルの種類と構造

一般の使用者が扱う同軸ケーブルの多くは、図 5.1 のような構造である。デジタル機器内部の配線にも極細の同軸線を使うことが増えているが、配線にも特殊工具を必要とするこれら特殊同軸については触れない。特性インピーダンスは多くの場合 50Ω ないし 75Ω である。これは、現行の構造で電磁場の漏れによる損失を抑えようとする、 50Ω 前後になり、信号の伝達速度 (5.9) を光速に近く保ちつつ損失を抑えようとする 75Ω 前後になるため、という説が書かれている書籍が存在するが、実際のところは講師の知るところではない。

図 5.5(a) は外部導体の網線を 2 重にして漏洩特性の向上を図ったもので、網線ではなくアルミ箔などを用いる場合もある。図 5.1 よりも柔軟性は劣る。更に GHz 以上のマイクロ波帯まで使用する場合は、図 5.5(b) のセミリジッドタイプを用いる。使用中は完全にリジッドで動かすことはないが、配線の際は外部導体 (純銅を使うことが多い) の柔軟性の範囲で曲げ伸ばしが可能である。物理計測でも良く使用し、低温で使用する場合は外部導体を熱伝導の悪いキュプロニッケルなどに置換する。超伝導体を使用する場合もある。図 5.5(c) は大電力用で、誘電損失を減らすため誘電体体積は最小限とし、導体断面を稼ぎながら柔軟性を維持するため、フレキシブル金属管 (flexible tube, 波打ち管, corrugate tube) を使用している。誘電体としては、図に記入されているようにポリエチレンが使用されることが多いが、高い周波数での誘電損失を少なくするため、テフロンが使用されることもある。

JIS C3501 では、同軸ケーブルの型番を「3D-2V」のような形式で表示することに規定されている。

- 「3」 最初の「3」は、外部絶縁被覆の外径 (概数) を mm で表したものである。実際には 3D-2V は $\phi 2.9$, 5D-2V は $\phi 4.8$, 10D-2V は $\phi 9.7$ である。
- 「D」 次の「D」は特性インピーダンスが 50Ω であることを示している。「C」は 75Ω である。
- 「2」 ハイフンの次の「2」は形状まで含めた誘電体の種類の規定で、ポリエチレン充填型であることを示す。ただし、JIS にはこれ以外の規定はない。テフロン型などは JIS の表示を使用できないことになる。
- 「V」 最後の「V」は、外部導体の構造と、絶縁被覆の種類を表し、V の場合は「一重編み, ビニール被覆」, W の

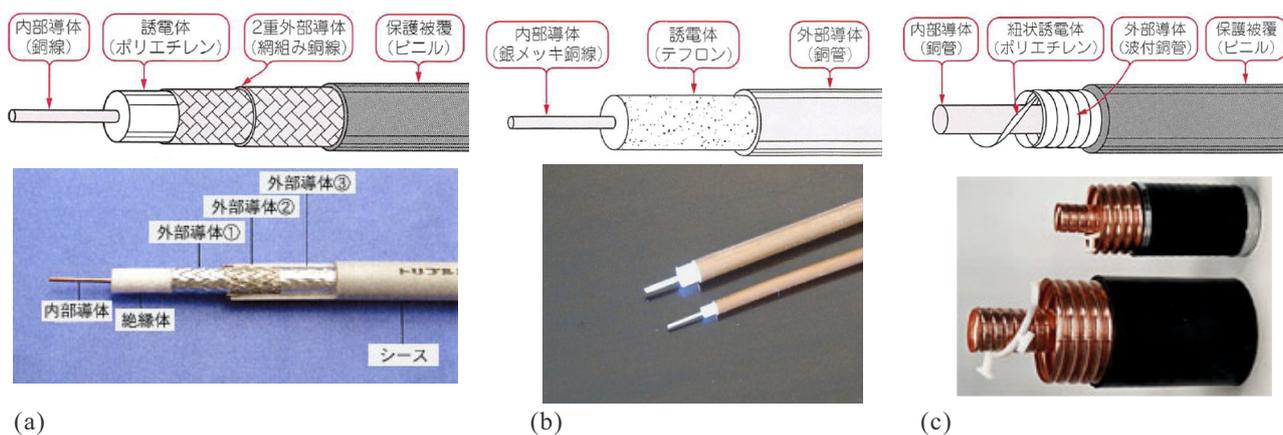


図 5.5 図 5.1 の典型的同軸ケーブル以外の構造を持つ同軸ケーブル。(a) 外部導体が 2 重管構造になっているもの。(b) セミリジッドタイプ。外部絶縁がないことが多い。(c) 大電流用。芯線、外部導体ともフレキシブル金属管になっている。

場合は「二重編み，ビニール被覆」のように決められている。

被覆の色 黒色，50Ω，グレー 75Ω となっているが，これはこうなっていないことがたいへん多い。

F2. 同軸コネクタの種類と構造

図 5.6 に，同軸ケーブルコネクタの断面の概念図を示した。

形式	外部導体内径	最高使用周波数
BNC	~7 mm	2~4 GHz
N	~7 mm	10~18 GHz
7 mm	7 mm	~18 GHz
SMA	4.15 mm	18 GHz
3.5 mm	3.5 mm	40 GHz
K	2.92 mm	40 GHz
2.4mm	2.4 mm	50 GHz
V	1.85 mm	65 GHz
W	1.1 mm	110 GHz
1.0 mm	1.0 mm	110 GHz

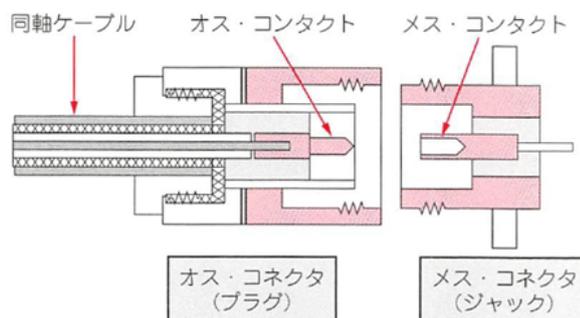


図 5.6 左：同軸コネクタの種類とおおよその使用最高周波数。トランジスタ技術 Special No. より。最高使用周波数は品質によりばらつきがある。上：同軸ケーブルコネクタの概念図。

芯線とシールドを対称性を損なわずに結合する構造となっており，芯線をスプリングで挟んでシールドは回転してクラッチしたり，ねじ込み式で結合するようになっている。通常は，プラグの方をケーブルに結合し，ジャックを集中定数回路側とする。ケーブル同士を接続する場合は，両端ジャックのコネクタを用意する。

上に，良く使用される同軸コネクタの呼称と，おおよその使用できる最高の周波数を示した。中でもポピュラーなものが次の 3 つである。

BNC コネクタ



左図に示したのが，BNC プラグ，ジャックである。低周波から GHz 程度で最もポピュラーに使用されてきた。挿入して半回転でクラッチできる簡便さが特徴である。標準の特性インピーダンスは 50Ω であるが，75Ω のものも作られている。

N 型コネクタ

BNC より高い、18GHz 程度まで使用できる。外径が非常に大きく、20mm を超えるものが普通である。真空管が標準部品であり、高周波機器や部品のサイズが大きかった頃はよく使用された。現在でもクライストロン管などの発生するマイクロ波は質が高く、そのような発信機から導波管にマイクロ波を導く際には N 型コネクタが頻用される。やや大きな電力を扱う場合にも使用する。特性インピーダンスは通常 50Ω。

SMA コネクタ

N 型と同等、あるいはそれ以上の周波数で使用でき、BNC よりも小型である。セミリジッド同軸端に取り付けて使用することも多い。外部導体はナットをねじ込んで止める形式になっている。特性インピーダンスは通常 50Ω。



同軸ケーブルで計測機器 (集中定数回路) 間を接続する場合、集中定数回路側の入力インピーダンスは必ずしもケーブルとマッチしているわけではなく、むしろ、電圧計測のために高めに設定されている場合が多い。このような場合、機器側端での反射を防ぐため

に、T 型コネクタで同軸端を逃してマッチしたインピーダンスで終端することがしばしば行われる。このような目的のため、コネクタに 50Ω の抵抗を組み込んだ終端器 (ターミネーター) が良く使用される。左上図は、その例を示したものである。

F3. 高エネルギー実験によく使用される LEMO ケーブル

高エネルギー物理学実験で特別によく使用されるのが、スイス LEMO 社の独自規格ケーブル、コネクタである。NIM (Nuclear Instrumentation Module) 規格の機器にも LEMO コネクタが使用されており、原子核/高エネルギー実験ではほとんど LEMO が使用されている。コネクタ径は小さく、プッシュ/プルによってクラッチ/解放されるため、接続が大変便利なのが特徴である。

参考文献

- [1] Paul J. Nahin, “Oliver Heaviside: The Life, Work, and Times of an Electrical Genius of the Victorian Age” (Johns Hopkins Univ. Press, 2002).
- [2] 高橋秀俊 「電磁気学」(裳華房, 1959).
- [3] 太田浩一 「マクスウェル理論の基礎」(東大出版会, 2002).
- [4] H. A. Wheeler, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. **13**, 172-185 (1965).
- [5] D. B. Davidson, “Computational electromagnetics for RF and microwave engineering” (Cambridge Univ. Press, 2005).

物理屋のための電子回路論 第8回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年11月15日

5.1.2 レッヘル線

同軸ケーブルの扱いかから、金属と誘電体の1次元方向に伸びた構造は、TEMモードを伝えることができ、この時、1次元方向とこれに垂直な2次元面内の電磁場自由度は分離して扱えることがわかる。これは、電磁場が電場・磁場の調和振動子集合として表現できる*1ことの表れ、と見ることもできる。式(5.2)の電信方程式が真空中の電磁波の波動方程式に対応するとすると、逆に真空を伝送路に見立てた時の電磁波の「特性インピーダンス」は

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 376\Omega \quad (5.16)$$

となる。これが「真空のインピーダンス」と呼ばれているのは、以上のような意味合いからである。また、 $\sqrt{\mu/\epsilon}$ は、物質(媒質)のインピーダンス、ということになる。更に、「特性インピーダンス」という「見方」を使って、2線式の伝送線路ではない導波管のような信号伝送路に関してもここでの議論を適用することができる。

ただし、同軸線のように遮蔽導体で伝送路を囲い込むような形になっていない場合、信号の電磁エネルギーは絶えず外部へ漏出し、大きな信号の減衰を生じる。レッヘル線(レッヒャー線, Lecher line)は、2本の導体棒(線)を平行させて高周波を伝えるものである。VHF帯のテレビ信号など、かつては平行フィーダーと呼ばれる2本の平行線を使って伝送していたが、レッヘル線とほとんど同じもの(線を平行に保つ薄い誘電体が入っているだけの違い)である。

図5.7(a)のようなレッヘル線を考え、2本の導体以外の部分は誘電率 ϵ 、透磁率 μ の物質で充填されているとする。半径 a の単位長さあたり q だけ帯電した(無限長)金属円柱が作る電場は、円柱中心からの距離を r として、 $q/2\pi\epsilon r$ である。導体表面の電位を0と置くと、この導体を作る電位は $\phi(r) = (q/2\pi\epsilon)\log(r/a)$ となる。従って、図5.7(a)

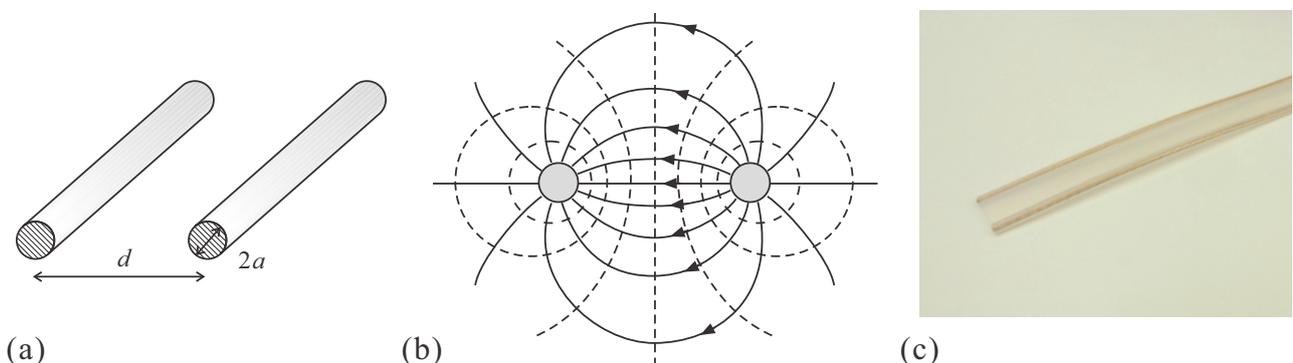


図 5.7 (a) レッヘル線概念図。2本の導体棒を平行配置したもの。(b) レッヘル線の断面の電磁場を模式的に描いたもの。実線が電気力線の接線、破線が磁力線の接線。(c) 平行フィーダー。特性インピーダンスは 300Ω 。オヤイデ電気 web ページより。

*1 ジーンズの定理。証明は[1]など。

で、 $d \gg a$ で、互いが形成する鏡像電荷の影響が無視できるとすると、今の場合、左右の導体を流れる電流を $\mp J$ 、表面の電位をそれぞれ ϕ_2 、 ϕ_1 と置いて、

$$\phi_1 = -\phi_2 = \frac{J\sqrt{\mu}}{2\pi} \log \frac{d}{a} \quad (5.17)$$

である。ただし、ゼロ電位を2つの導体の中点に取った。これより、特性インピーダンスは、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{1}{\pi} \log \frac{d}{a} \quad (5.18)$$

となる。図 5.7(c) の平行フィーダーで、 $\mu = \mu_0$ 、 $\epsilon = \epsilon_0$ とし、 $d/a = 10$ とすると、 $Z_0 = 277\Omega$ となる。実際、写真のものは 300Ω として販売されている。このように、真空インピーダンスに比較的近い特性インピーダンスを有するのが特徴である。

5.1.3 マイクロストリップライン

高周波回路では、長い伝送路では分布定数回路の扱いが必要となる一方、個別素子においては、ある程度は集中定数回路の考え方が成立する。そこで、集中定数回路の導線部分を一部分布定数回路で置き換えるという折衷的表現が行われる。その際も、素子間をつなぐ伝送路が問題となる。同軸線は電磁場の閉じ込め効果が大いだが、極めて微小になっている素子をすべて同軸線で結線することが現実的ではない。

そこで、レッヘル線にならい、半解放のため同軸線より閉じ込め効果が小さいが、素子を配置する基板上に形成できる**マイクロストリップライン** (microstrip line) が良く使用される。これは、板状の導体により高周波を通すもので、基本は、図 5.8(a) のように、接地した平面導体の上に同じく平面上の誘電体を置き、その上に細長い導体を置いた構造である。電子部品を配置するプリント基板は一般に銅箔でガラスエポキシなどの誘電体板を両面から挟んだ構造をしており、片面に回路に合わせてエッチングなどの手法を用いてパターンを形成することによって容易に図 5.8(a) のような構造が得られることがマイクロストリップラインが盛んに使用される一因である。(a) よりも更に外部に漏れる電磁場、および隣接回路との電磁的結合を減らしたい場合、線路の両側に設置導体で挟んだ図 5.8(b) のようなコプレイナーウェイブガイドと呼ばれる構造も良く使用される。

このように物理的な形成はたいへん簡単であるが、マイクロストリップラインは同軸ケーブルやレッヘル線と比べて図 5.8(a) の断面だけでも対称性の悪い形状をしており、特性インピーダンスの計算や更には2次元的にパターン化された線路を伝わる電磁場を解析することは容易ではない。現在は、PC やモバイル機器など GHz 帯の高周波を扱う回路設計の需要が高まり、このような立体回路を伝わる電磁場を3次元(や2.5次元)的にシミュレートするシミュレーターも多数開発されている(一般に大変高価である)。

図 5.8(a) のようなストリップラインの特性インピーダンスの近似式として古くから使われているものに [2]、幅の

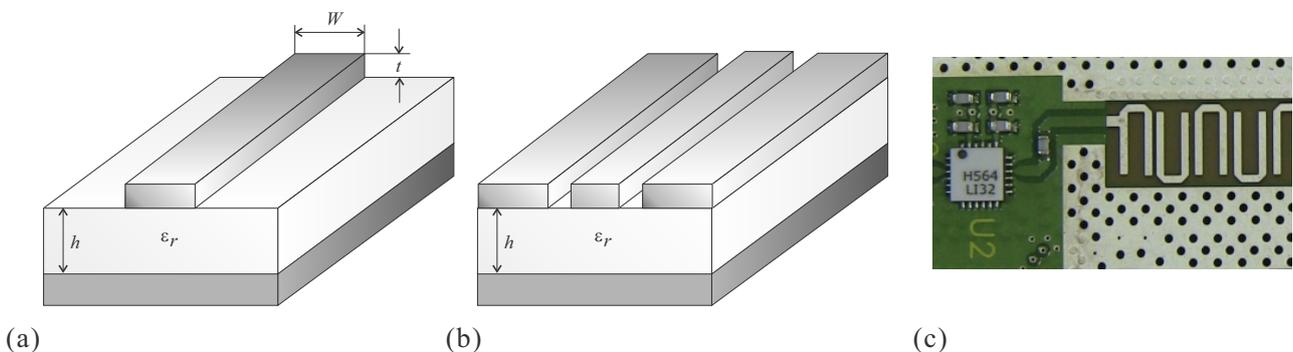


図 5.8 (a) 単一ストリップと接地平面(グラウンドプレーン)によるマイクロストリップライン。(b) 中央ストリップの両側に接地金属板を配置したコプレイナーウェイブガイド。(c) 高周波回路に使用されているマイクロストリップラインの実例。白く細い部分。静電結合を使ったマイクロストリップラインフィルター。

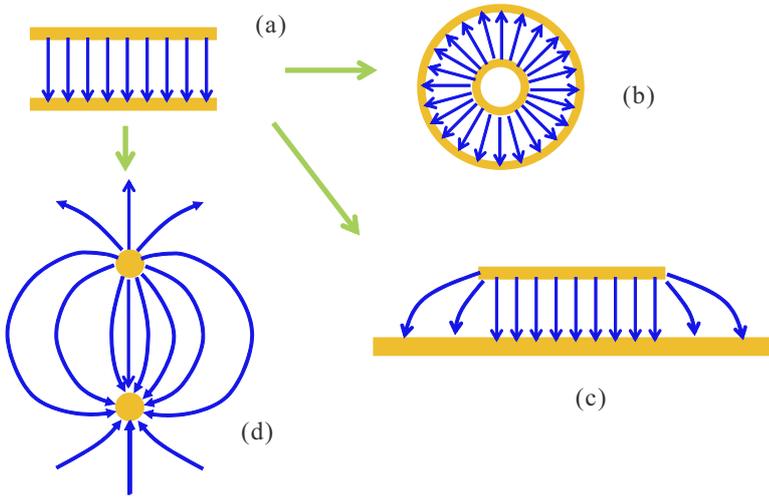


図 5.9 (a) 平行平板コンデンサ. これを変形することで, 断面に2つの金属を有する伝送線のファミリーを形成できる. (b) 平行平板を丸めることで同軸ケーブル断面となる. (c) 解放構造にするとマイクロストリップラインになる. (d) 更に電極を縮めるとダイポールとなり, レッヘル線断面となる. これらはいずれも TEM モードが主モードとなる.

広い ($W/h > 3.3$) ストリップに対して

$$Z(W, h, \epsilon_r) = \frac{Z_{F0}}{2\sqrt{\epsilon_r}} \left\{ \frac{W}{2h} + \frac{1}{\pi} \log 4 + \frac{\epsilon_r + 1}{2\pi\epsilon_r} \log \left[\frac{\pi e}{2} \left(\frac{W}{2h} + 0.94 \right) \right] \frac{\epsilon_r - 1}{2\pi\epsilon_r^2} \log \frac{e\pi^2}{16} \right\}^{-1}, \quad (5.19a)$$

幅の狭い ($W/h \leq 3.3$) ものに対して

$$Z(W, h, \epsilon_r) = \frac{Z_{F0}}{\pi\sqrt{2(\epsilon_r + 1)}} \left\{ \log \left[\frac{4h}{W} + \sqrt{\left(\frac{4h}{W} \right)^2 + 2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 1} \left(\log \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\epsilon_r} \log \frac{4}{\pi} \right) \right\} \quad (5.19b)$$

がある. Z_{F0} は真空のインピーダンス, ϵ_r は誘電体の比誘電率 ($\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$) である. 解析的な計算法については, [3] などが詳しい.

5.1.4 導波管

導波管 (waveguide) は, 金属製の筒であり形態的には同軸ケーブルの外部シールドのみを残したものと見ることができる. 逆に, これまで見てきた導波路について, 断面の電磁場を閉じ込めるという観点もある. 電場を閉じ込めるのに最もわかりやすい構造は図 5.9(a) の平行平板コンデンサである. 金属板の長さが有限だと端から電場が漏れ出す, これがマイクロストリップライン, 金属板を縮めて丸棒にしてしまったものがレッヘル線, 端からのもれをなくするために金属板を丸めて円筒形にしたものが同軸ケーブルと考えることができる.

これに比べると, 伝送路から導体を1つ減らした導波管には, 以上の伝送路とは明瞭な違いが現れる. すなわち, 伝送路断面における電磁波の存在空間が単連結 (simply-connected) になり, 多重連結の伝送路で主モード (primary mode) であった TEM モードが存在できなくなっている. これ以外のモード, $E_z \neq 0$ あるいは $H_z \neq 0$ では, (5.8) とは異なり, $\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2 \neq 0$ である. そこで, (5.7) に更に Maxwell 方程式を使用することで, E_z, H_z について同形の次の微分方程式を得る.

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] E_z = -(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2) E_z, \quad (5.20a)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] H_z = -(\omega^2 \epsilon \mu + \gamma^2) H_z. \quad (5.20b)$$

従って, $E_z = 0$ あるいは $H_z = 0$ に対して解が存在し, 一般解はこれらの重ね合わせで得ることができる. 前者を TE (transverse electric) モード, 後者を TM (transverse magnetic) モードと呼ぶ.

これらのモードを得るためには (5.20) を適当な境界条件下で解けばよく, 数多くのモードが得られる. これらについて議論するのは講義をやや外れてしまうので, [4]などを参照いただくとして, 図 5.10 の非常に簡単な見方を紹介しておく. 図 5.10(a) のように対向する導体板を持ってくると, 電磁波は2枚の導体板の間を反射しながら進むが,

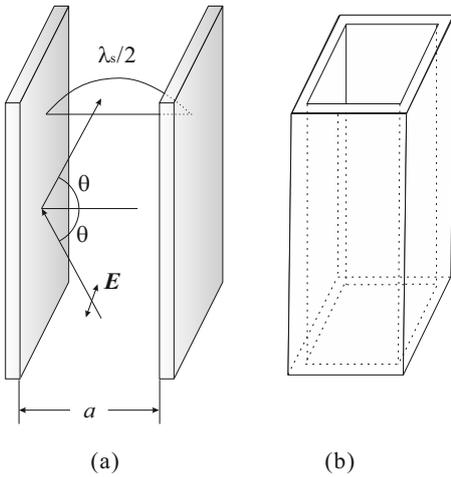


図 5.10 導波管の簡単なモデル. 2枚の導体板で電磁波を挟む.

両側の板の表面が固定端となるため板の間隔を a として, $\lambda_s = 2a$ の定在波が立つことになる. 周波数を f として, c/f で決まる本来の波長 λ に対し入射角を θ とすると,

$$\lambda / \cos \theta = \lambda_s = 2a \quad \therefore \theta = \arccos(\lambda/2a) \quad (5.21)$$

であるから, 板の間隔と波長から伝播可能な入射角が決まる.

この時, 導波管内には対向する導体からの反射によって2つの平面波の波面の干渉による電場が現れる. これが, (5.20) を解いて得られるモードに相当するものである. また, 導波管内の群速度は $v_g = c \sin \theta$ で当然ながら角度分だけ c よりも遅くなる. (5.21) より, $\lambda > 2a$ すなわち周波数 f が $c/2a$ よりも小さい場合は, 伝播できなくなる. これを“遮断周波数”(cut-off frequency) という.

5.1.5 光ファイバー

導波管とは逆に, 同軸ケーブルから金属をなくして誘電体だけにした, 誘電体導波路と呼ばれるものも存在する. 導波管は金属表面で電磁波が反射されることを用いて管中に電磁波を閉じ込めるものだが, 周波数が高くなり光領域となっても使用できる. ただし当然波長が短くなるに従って管内部表面の細かい凹凸が光の進行を妨げるようになるため, 内壁は鏡面に仕上げることが必要が生じ, 長距離の伝送には向かない. 屈折率の異なる誘電材料を用いて全反射により電磁波を閉じ込めるのが光ファイバーである.

図 5.11 左図のように入射角を β , 出射角を α とすると, $\sin \alpha = n \sin \beta$ で n は 1 より大きいので, β を $\arcsin(1/n)$ より大きく取ることが可能である. この時, スネルの法則を満たす α は存在せず, 全反射が生じる. 図 5.11 右図のように屈折率の大きな誘電体を小さな誘電体で包んだ筒状の構造を考えると, 界面で全反射を起こすような角度の電磁波(光)にとっては導波管と同じ状況になっている. これが光ファイバーの基本構造である. 中心の誘電体を“コア”(core), 周囲の誘電体を“クラッド”(clad) と呼ぶ. 導体導波管の場合と異なるのは, 界面で電場が零という境界条件が成立しないことである. しかしこれも, 外部の誘電体を遠方まで伝播する電磁波が存在しない*2ことから, 数学的には少し面倒になるが導波管の場合と同様, 伝播できる電磁波はコア周辺に定在波を持ち, モードが定義できる. コアを非常に細く作ると, コア内部に節を持つような電磁波の周波数は極めて高くなり, 赤外や可視の光の領域では伝播できる光のモードは1つだけに限られる. このようなファイバーを“単モードファイバー”と呼び, 現在光通信で使われているのは主にこのタイプである.

*2 指数関数的に減衰する光がクラッドにも沁み出し, これはエヴァネッセント (evanescent) 光と呼ばれる.

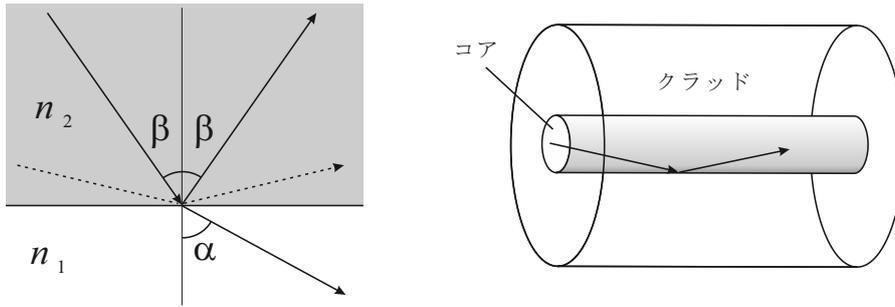


図 5.11 左図は誘電率の大きな物質から小さな物質へ電磁波が入射した時の全反射現象を説明したもの。β が arcsin(n₁/n₂) を超えると (真空の場合 n₁ = 1), 屈折電磁波は存在できなくなり, 破線のようにすべて反射される。右は光ファイバーの模式図で, 誘電率の小さな物質 (クラッド) で大きな物質 (コア) を包んでいるため, コア内で一旦全反射された電磁波はそのまま全反射を続けてコア内を伝播する。

5.2 伝送路の伝播現象

5.2.1 抵抗のある伝送路

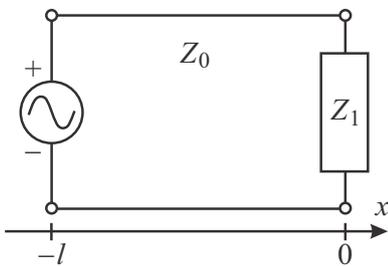
(??) の伝播速度は波数に依存しない。すなわち, TEM モードの波動には分散がなく, 入力波形は形を崩さずに伝播する*3。従って, 同軸ケーブルのように電磁場の漏れが少ない伝送路においては, 信号波形減衰の主要因はインピーダンス (アドミタンス) 内の抵抗成分である。電磁場の漏れ出しが大きな伝送路においても, 漏れ出しがある, ということをインピーダンス内抵抗成分の形で表現することができる。

式 (??) の κ で, $Z = R + i\omega L$ とすると, 振動数 ω 成分を考え,

$$\kappa(\omega) = i\omega\sqrt{LC} \left(1 - i\frac{R}{\omega L}\right)^{1/2} \sim i\frac{\omega}{\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{R}{Z_0} \quad (5.22)$$

となる。最後の近似は, ω が十分大きく $\omega \gg R/L$ の場合で, $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$, $Z_0 \equiv \sqrt{L/C}$ としている。exp(-κx + iωt) の進行波で考えると, 全体にファクター exp(-Rx/2Z₀) がかかって, 特徴的距離 2Z₀/R で減衰する事がわかる。このことから, リアクタンスのみによる特性インピーダンス Z₀ は大きいほうが減衰が小さい。このため, 長い伝送線路では特性インピーダンスの大きなものが使用される事が多く, 場合によってはコイルなどの挿入により強制的に Z₀ を大きくする場合もある。

5.2.2 伝送路の接続と終端



長さ l の特性インピーダンス Z₀ の伝送線の片側に電源, 他端にインピーダンス Z₁ の負荷をつないだとする。x 軸を左図のように設定すると, x = 0 では (??)

$$\left. \begin{aligned} V &= V_+ + V_- = Z_0(J_+ - J_-) \\ J &= J_+ + J_- \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

である。ここで, +, - の添え字は, それぞれ, 進行波, 逆行波成分であること表し, exp ±κx の符号と対応している。従って

$$Z_1 = \frac{V}{J} = \frac{J_+ - J_-}{J_+ + J_-} Z_0 \quad (x = 0) \quad (5.24)$$

*3 高次モードには, TE モード (磁場は進行方向成分を持つ), TM モード (電場は進行方向成分を持つ) などがあり, これらは特に低周波では分散を有している。

である。これは、右へ進む進行波が $x = 0$ で反射されて逆行波 (反射波) を発生していると考えられ、反射の割合、すなわち反射係数 r は

$$r = \frac{V_-}{V_+} = -\frac{J_-}{J_+} = \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \quad (5.25)$$

となる。これは反射の際に位相がシフトすることを考慮し、一般に複素数である。これから明らかのように、 $Z_1 = Z_0$ であれば反射は 0 となる。この場合、伝送線と負荷とはインピーダンス整合している、という。それ以外の場合は、信号の一部が伝送線端で反射し、余計な信号として伝送線内に残る。このようなことは一般には極力避けなければならないので、特性インピーダンスと終端の整合は重要である。整合していない場合は、伝送線に沿って定在波が立つ。この定在波の腹の振幅と谷の電圧振幅の比を **電圧定在波比** (voltage-standing wave ratio, VSWR) と呼ぶ。損失が無視できる場合、

$$\text{VSWR} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|} \quad (5.26)$$

である。これは数 MHz 程度の高周波では比較的容易に測定できるので、反射係数の測定に用いられる。

信号源電源のある $x = -l$ では

$$\left. \begin{aligned} V &= V_+ \exp(\kappa l) + V_- \exp(-\kappa l) = Z_0(J_+ \exp(\kappa l) - J_- \exp(-\kappa l)) \\ J &= J_+ \exp(\kappa l) + J_- \exp(-\kappa l) \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

であるから、電源から右を見た時のインピーダンス Z_l は

$$Z_l = \frac{V}{J} = \frac{J_+ \exp(\kappa l) - J_- \exp(-\kappa l)}{J_+ \exp(\kappa l) + J_- \exp(-\kappa l)} Z_0 \quad (5.28)$$

である。この地点での反射率 r_l は

$$r_l = r \exp(-2\kappa l) \quad (5.29)$$

となる。

損失が無視できて $\kappa = i\omega\sqrt{LC} \equiv i\beta$ と書ける場合、(5.28) の l 依存性は $\tanh(\kappa l) = i \tan(\beta l)$ で表すことができる。信号の波長 $v/(2\pi\omega)$ を λ とおくと、 Z_l は $\lambda/2$ 周期の周期関数となる。 $l = \lambda/4$ の時、

$$Z_l = Z_0^2 / Z_1 \quad (5.30)$$

で、右を見たインピーダンスは負荷のアドミタンスに比例している。この伝送線を **$\lambda/4$ 変成器**と呼んでいる。従って、 $Z_1 = \infty$ (開放) の場合、入力インピーダンスは 0 となる。逆に右端を短絡した場合 ($Z_1 = 0$) は、入力インピーダンスは発散する。これは、しばしば高周波の切替器などに応用される。

特性インピーダンス Z_0 の伝送路に Z'_0 の伝送路を接続した場合も、接続伝送路側を見たインピーダンスは Z'_0 であるから、インピーダンス Z'_0 をぶら下げた場合と同じである。すなわち、反射係数は

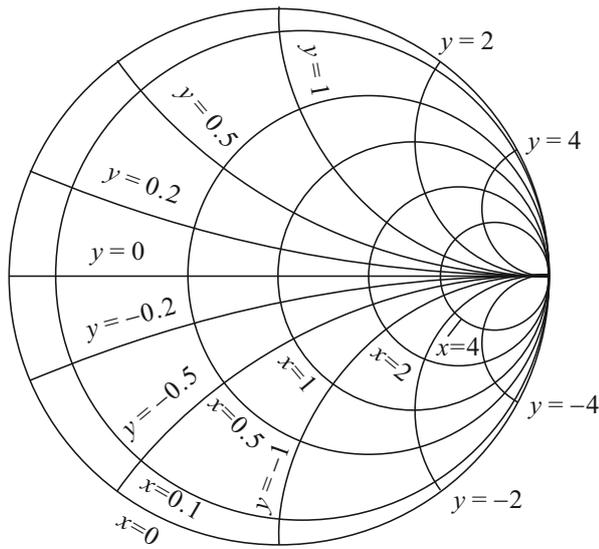
$$r = \frac{Z'_0 - Z_0}{Z'_0 + Z_0} \quad (5.31)$$

で与えられ、伝送線路の接続でも特性インピーダンスの違いによって反射が生じることがわかる。

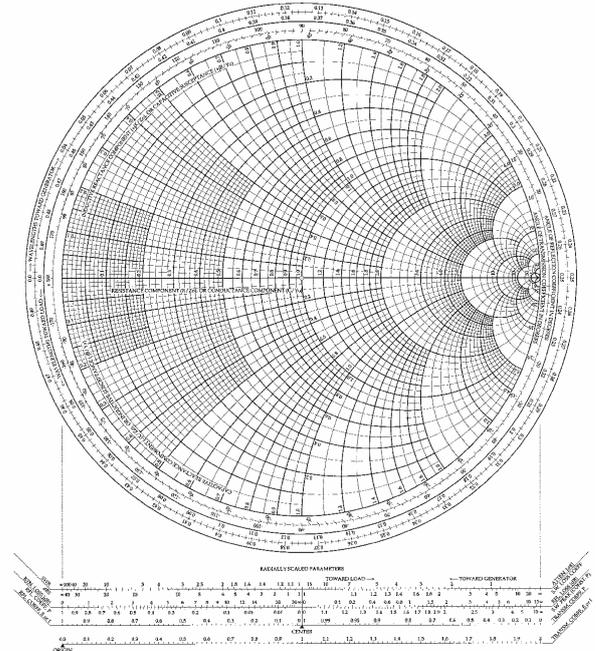
5.2.3 スミス・チャート、イミッタンス・チャート

終端インピーダンス Z_1 を反射率 r の平面に等角写像したものを**スミス・チャート** (Smith chart) と呼ぶ。これは次のように求まる。まず、 Z_1 を Z_0 で規格化し、これを規格化インピーダンス Z_n と呼ぶことにする。 $Z_n = x + iy$ $r = u + iw$ (x, y, u, w は実数) とすると、

$$u + iw = r = \frac{Z_n - 1}{Z_n + 1} = \frac{(x - 1) + iy}{(x + 1) + iy} \quad (5.32)$$



(a)



(b)

図 5.12 (a) スミス・チャート座標の描き方. (b) 実用スミス・チャート座標.

であるから、

$$\left. \begin{aligned} x - 1 &= (x + 1)u - yw \\ y &= yu + w(x + 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

という陰関数表示が得られる。今、 x を一定値にとる場合を考えると、(5.33) から y を消去して

$$\left(u - \frac{x}{x+1}\right)^2 + w^2 = \frac{1}{(x+1)^2} \quad (5.34)$$

となり、円を表す。これを**定抵抗円**と呼ぶ。同様に y が一定値の場合

$$(u - 1)^2 + \left(w - \frac{1}{y}\right)^2 = \frac{1}{y^2} \quad (5.35)$$

で、やはり円となり、**定リアクタンス円**と呼ぶ。ただし、この場合、パラメタ x が $x \geq 0$ の範囲で変化しても、 r はこの全円周上を動くわけではなく、(5.32) からわかるように、原点を中心とする半径 1 の円内でこの円周上を動く。以上よりスミス・チャート座標を図 5.12 のように描くことができる。

スミス・チャートは終端インピーダンスと反射率の関係を示すものであるが、これをアドミッタンスに対するものに直すには、(5.32) より $Y \equiv 1/Z$ とすると、

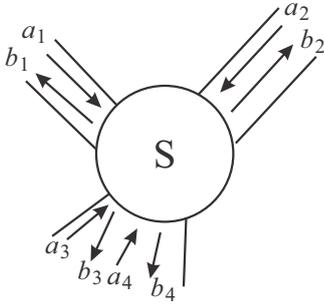
$$r = \frac{1 - Y}{1 + Y} \quad (5.36)$$

となり、これは形式的には (5.32) の符号を反転した形をしている。したがって、アドミッタンスに対するチャートはスミス・チャートを 180° 回転させたものになっている。この 2 種類のチャートを重ねあわせて一つの図に示したものを**イミッタンス・チャート (immittance chart)** と呼んでいる。3.1.1 節で検討した LCR 直列回路で終端した場合は、抵抗成分が一定で、周波数によりリアクタンス成分が変化するので、 r を表す点が周波数により定抵抗円の上を移動していく。 $\omega = 0, \infty$ の両方で、 $r = 1$ であるから $r = 1$ から出発して定抵抗円の上を一周して戻ってくる軌道を描ける。

スミス・チャートは高周波回路特性の視覚化の上では大変重宝である。インピーダンス整合回路などの設計にも有用であるし、更に重要なのは、高周波の能動素子について、次に説明する S パラメタがスミス・チャートで与えられることである。物理の実験現場では、インピーダンス整合を取る必要が生じるのは、1) 磁気共鳴など、いわゆる「電波物性」測定において、試料側と計測器側で整合が必要となる、

5.3 S 行列 (S パラメタ)

5.3.1 S 行列の定義



集中定数回路では、導線は電位を瞬時に伝えたので、物理的な接触はすなわち完全な結合を意味したが、分布定数回路を必要とする高周波では、前節の議論の通り、結合に特別な扱いを必要とする。ここで、複数伝送路の結合について一般的な手法を考える。これまで、1つの伝送路に対して単一のモードのみ考えてきたが、一般に高周波伝送路では多数のモードが存在し、線形性からこれらのモードを通じた伝送は線路内では互いに独立と考えることができる。そこで、各モードを(伝送)チャンネル(channel)と呼び、結合部を除いて独立とする。伝送チャンネルは、(4.9)の解として $\exp(\pm \kappa x)$ と、双方向に進むものがあつたように、一般に双方向性である。これは、伝送路の反転対称性(時間反転対称性)によるもので、外部磁場が印可されて時間反転対称性が破れている場合などは、注意が必要になる。

そこで、ある伝送路の結合点を考え、結合点に接続されている伝送チャンネルを i, j など指数付けする。結合点への入力波動の各チャンネル複素振幅を a_i 、出力波動複素振幅を b_i として、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1i} & \cdots & S_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{i1} & & S_{ii} & & S_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{n1} & \cdots & S_{ni} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

と書き、 $\{S_{ij}\}$ を散乱行列あるいは **S 行列** (S matrix) と呼ぶ。このように置ける、ということは、もちろん、結合点でのチャンネル間の結合が線形であることと同値である。「複素」振幅と断つたことからわかるように、S 行列では各波動の位相関係も含んで扱っており、当然 S 行列要素も一般には複素数である。

S 行列には、線形回路の対称性を反映した幾つかの特徴がある。1つは、**相反定理** (reciprocity theorem) と呼ばれ、

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad (5.38)$$

すなわち、対称行列である。また、波動が TEM モードで分散を持たず、結合経路も同じ媒質を使っていて群速度が一定である場合、結合点での電磁エネルギー消失がないとすると、S 行列はユニタリー

$$\sum_j S_{ji} S_{jk}^* = \delta_{ik} \quad (5.39)$$

である。これは、エネルギー保存則から当然で、群速度が各チャンネルですべて同じであるから(流入エネルギー)=(流出エネルギー)より、

$$\sum_i |a_i|^2 = \sum_i |b_i|^2 \quad (5.40)$$

すなわち、S 行列はベクトルのノルムを保ち、ユニタリーである。

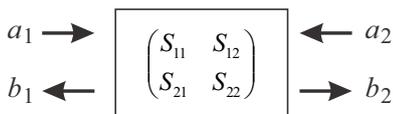


図 5.13 2ポート S 行列

線路を通しての信号の伝送、反射などが重要になる高周波回路では、S 行列は頻用される。場合によっては増幅作用のある回路などにも使われ、このような場合は当然ユニタリー性(5.39)は成り立たない。頻用されるため S 行列要素が **S パラメタ** と呼ばれ、高周波回路での標準語彙となっている。左図の2ポート回路の場合、S パラメタ $\{S_{ij}\}$ は

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

で定義される。1本の伝送路には2本の導体線が必要であるから、2ポート回路は4端子回路である。ただし、(5.41)のように書いた場合、S行列は、4端子回路を表した他の行列とは、1つのポートを双方向伝送路として各方向の散乱に行列要素をそれぞれ充てている点が明瞭に異なっているので注意が必要である。

Sパラメタの利点は、容易に測定できることで、ネットワークアナライザのような専用機器を用いれば、瞬時に正確な値を得ることができる。Sパラメタから各種特性量を計算することができる。例えば特性インピーダンス Z_0 が既知であれば、負荷インピーダンス Z_1 は $r = S_{11}$ より (4.37) を使って容易に求められる。より簡単には S_{11} をスミス・チャートにプロットすれば良い。Sパラメタを例えば Z で表すと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} (Z_{11} - Z_0)(Z_{22} + Z_0) - Z_{12}Z_{21} & 2Z_0Z_{12} \\ 2Z_0Z_{21} & (Z_{11} + Z_0)(Z_{22} - Z_0) - Z_{12}Z_{21} \end{pmatrix}. \quad (5.42)$$

5.3.2 量子輸送とS行列

S行列の記述対象は、ごく一般的に伝送路を伝播する波動の結節点であった。量子力学に従い、物質中を伝播する電子も波動と考えることができ、いわゆる量子輸送現象論は電子が量子力学的な波動及び粒子としての伝播現象を対象とする。従って、量子輸送現象も伝送路とS行列による記述が可能であり、**散乱形式論** (scattering theory) と呼ばれている。S行列を議論したついでに、その導入部を紹介する。

散乱形式論の基礎になるのは、**量子細線** (quantum wire) の電気伝導である。量子細線とは、空間ポテンシャルの閉じ込め効果を用いて、ある1次元方向以外の運動の自由度を量子化によって凍結した電子の伝導路である。このような「伝導路」を**伝導チャネル** (conductance channel) と呼ぶ。電子回路と同様に、各チャネルは時間反転対称性のある系では双方向性であり、その電気伝導度は

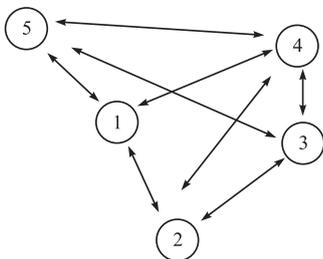
$$G_q = \frac{2e^2}{h} \quad (5.43)$$

とユニバーサルな定数で表される。式 (5.43) は、電子スピンの自由度2を考慮しており、これを「別チャネル」と考える場合は $G_q = e^2/h$ となる。(5.43)、あるいはこの $1/2$ の e^2/h を**伝導度量子** (conductance quantum) と呼ぶ。

量子力学において「粒子(波動)の流れ」は、実空間座標表示の波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ に対して確率密度流

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2im} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \quad (5.44)$$

で与えられる。しかし、これは、すでに期待値であり、これを直接扱う理論形式は量子輸送に現れる干渉効果などの量子効果を記述することができない。そこで、空間存在確率密度に対数する実空間波動関数に対応する**複素確率密度流**を考える。これは、絶対値の2乗を取れば確率密度流になり波動関数の位相情報を保存するもので、最も単純には波動関数 ψ が表す粒子の群速度を v_g と置いて、 $\sqrt{v_g} \psi$ とすれば良い。ある結節点に流れこむ複素確率密度流を $\{a_i\}$ 、流れでる方を $\{b_i\}$ と書けば、(5.37) の定義式をそのまま使用してS行列による記述が可能である。



量子輸送に対するS行列においては、時間反転対称性のある系では、(5.38) の相反定理 (Onsager 相反性)、(5.39) のユニタリー性のいずれもが成立する。散乱形式論での量子伝導体の記述は、左図のようにS行列で記述される結節点が幾つかあり、その間を双方向性の伝導チャネルが結んでいる、というものである。この伝導チャネルは量子細線内の量子化準位に相当する1次元伝導路で定義したが、これを広げて、例えば、ファインマン経路積分の**古典経路**に相当するものとも考えることも可能である。この定義は、任意の3次元導体であってもこのような伝導チャネルの重ね合わせとして記述可能であることを示している。

5.3.3 S行列の接続

量子伝導体のこのような記述法を考えると、複数のS行列を接続したものを更に1つのS行列と見ることが可能で、また重要であることがわかる。最も簡単なものとして、図 5.13 の2ポートS行列を考える。まず、このような

S 行列は、結節点での複素反射係数、透過係数を用いて、

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_L & t_R \\ t_L & r_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

ここで、 $t_{L,R}$, $r_{L,R}$ はそれぞれ左、右からの複素透過率・反射率であり、透過率・反射率 $T_{L,R}$, $R_{L,R}$ との関係は

$$T_{L,R} = |t_{L,R}|^2 = 1 - R_{L,R} = 1 - |r_{L,R}|^2 \quad (5.46)$$

である。最終的に、透過率が求めれば、これに (5.43) の伝導度量子を乗じたものが伝導体全体の電気伝導度となる。

導体 A, B を S 行列で表し、左図のように接続する。接続条件は

$$a_2 = b_3, \quad a_3 = b_2 \quad (5.47)$$

であるから、S 行列の要素に A, B の上付きを付けて区別し、この A, B 合わせた直列伝導体を 1 つの S 行列で表すと

$$\mathbf{S}_{AB} = \begin{pmatrix} r_L^{AB} & t_R^{AB} \\ t_L^{AB} & r_R^{AB} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_L^A + t_R^A r_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} t_L^A & t_R^A (I - r_L^B r_R^A)^{-1} t_R^B \\ t_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} t_L^A & r_R^B + t_L^B (I - r_R^A r_L^B)^{-1} r_R^A t_R^B \end{bmatrix}$$

となる。以上、 t , r などは、スカラーとしてきたが、チャンネルが左右複数ある場合でも、これらをチャンネルを指数とする行列に変えれば上の扱いはそのまま成立する。行列 t を伝導体の**透過行列**、 r を**反射行列**と呼ぶ。

5.3.4 T 行列

入射チャンネルを出射チャンネルへ変換した S 行列に対して、**T 行列**は、図 5.14(a) のように、左端子の入出力を右端子の入出力へと変換する行列であり、

$$\mathbf{M}_T \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

と定義される。図 5.14(b) からわかるように

$$\mathbf{M}_T^{AB} = \mathbf{M}_T^B \mathbf{M}_T^A \quad (5.48)$$

と、合成は行列の積で表されるので極めて容易である。一方、T 行列を複素反射係数、透過係数で表すと

$$\mathbf{M}_T = \begin{pmatrix} 1/t^* & -r^*/t^* \\ -r/t & 1/t \end{pmatrix}$$

となり、S 行列の方が見通しが良い。また、3 端子以上の分岐を扱うと、(5.48) の利点は失われる。以上の特徴から、問題に応じて S 行列、T 行列が選択される。

5.3.5 高周波デバイスの S パラメタ表示

高周波用バイポーラ接合トランジスタ (BJT) や金属-半導体ショットキー電場効果トランジスタ (MESFET) など、高周波増幅デバイスの用途としては、図 5.15 上図のように、伝送線路からの信号を受けて何らかの増幅動作を行い、負荷の伝送線路へ信号を送り出すこと、と考えてよい。図では、高周波で頻用される特性インピーダンス 50Ω のラインを仮定している。また、個別デバイスを 3.4, 3.5 節で見たように、適当なバイアスを与えて線形 4 端子回路と

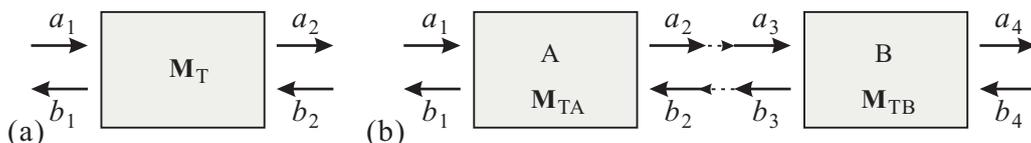


図 5.14 (a) T 行列の概念図. (b) T 行列の合成.

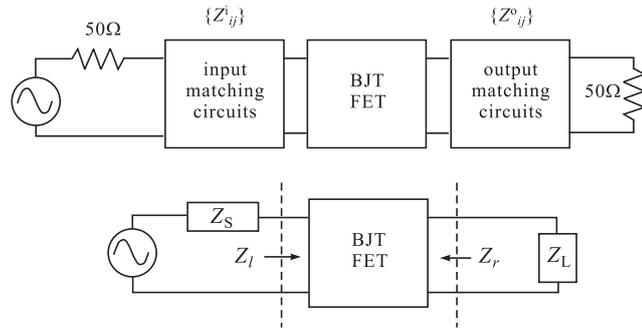
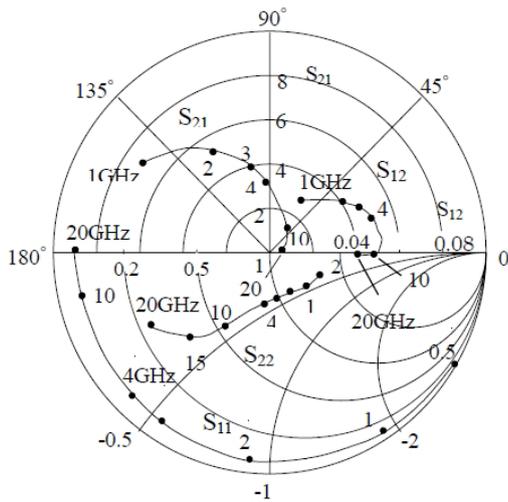


図 5.15 左：高周波用 GaAs(半導体)MESFET の S パラメータをスミスチャート上の軌跡として与えた例。上：アクティブ素子を挟んで特性インピーダンス 50Ω の伝送路とインピーダンスマッチを取る回路のブロックダイアグラム。下：入出力を単インピーダンス化。

して扱う。このような高周波用途の増幅デバイスは、図 5.15 左図のように周波数特性を S パラメータの形にまとめて、スミス・チャート上に与えていることが多い*4。この例を見てもわかるように、個別デバイスは 50Ω に調整されているわけではなく (現実問題、負荷回路なしで (すなわち IC 化することなく) これまで見た半導体デバイスを 50Ω に調整することは困難である)、2.9 節で見たように、何らかの外部負荷回路によってインピーダンス整合を取る必要がある。この時、高周波ではインピーダンスの周波数依存性が大きく、必要な中心周波数、バンド幅更にはノイズ特性も考慮して周辺回路を決定する必要がある。ここでは、考える中心周波数でのインピーダンス整合を中心に考える。なお、信号論については次章で扱う予定である。

図 5.15 上の回路は、鳳テブナンの定理を使うことで、図 5.15 下の回路へと等価回路変換することができる。注意すべきことは、回路は BJT(FET) 部分によって回路が分断されているわけではない、ということで、左右独立にチューニングを行うと整合が取れていない可能性が高い*5。

まず、図 5.15 上のブロック図で、トランジスタ領域左右の信号源、および負荷のインピーダンスは

$$Z_S = Z_{22}^i - \frac{Z_{12}^i Z_{21}^i}{50 + Z_{11}^i}, \quad Z_L = Z_{11}^o - \frac{Z_{12}^o Z_{21}^o}{50 + Z_{22}^o} \quad (5.49)$$

と計算される。次に、これらと、トランジスタを Z パラメータ (インピーダンス行列) で表したものの $\{Z_{ij}\}$ を使って、図 5.15 下で、信号源側からトランジスタ側を見た時のインピーダンス Z_i と、負荷側からトランジスタ側を見た時のインピーダンス Z_r は

$$Z_i = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}, \quad Z_r = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_S + Z_{11}} \quad (5.50)$$

と表される。形式的には、(5.49) と (5.50) をマッチさせれば良い。

5.3.6 S パラメータを用いたインピーダンス整合 [5]

同じことを、S パラメータを用いて行うことを考える。トランジスタ系が 2 ポート S 行列 $\{S_{ij}\}$ で (5.41) のように表されているとする。図 5.16 のように、(a) ロード側に反射係数 $R_L = a_2/b_2$ の負荷を接続した場合、(b) ソース側に反射係数 $R_S = a_1/b_1$ の負荷を接続した場合をそれぞれ考える。(a) の場合、左から見た反射係数 $R_{in} = b_1/a_1$ は

$$R_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} R_L}{1 - S_{22} R_L} \quad (5.51a)$$

*4 通常、規格表には測定値の数表も同時に示されている。

*5 BJT や FET を直列接続 (カスコード接続, cascode connection) することで、接続インピーダンスを高くし、ミラー効果を下げて左右の独立性を上げ、個別のチューニングを可能にすることも行われている。

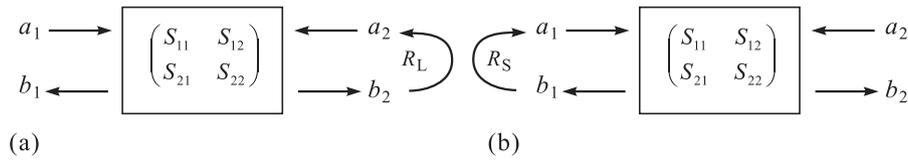


図 5.16 S 行列系へ反射負荷を接続する. (a) ロード側に反射係数 R_L の負荷を接続した場合. (b) ソース側に反射係数 R_S の負荷を接続した場合.

となる. 同様に, (b) の場合, 右から見た反射係数は,

$$R_{\text{out}} = S_{22} + \frac{S_{12}S_{21}R_S}{1 - S_{11}R_S} \quad (5.51b)$$

となる.

今, (a), (b) の接続を同時に行い, 入出力のインピーダンスが整合しているとする. 5.3.1 節で, Z 行列が S 行列を用いて容易に表せる, と述べたように, 反射係数も整合しているはずである. ただし, 信号の向きが逆であるから, 互いに複素共役になっているはずである.

$$R_L = R_{\text{out}}^*, \quad R_S = R_{\text{in}}^*. \quad (5.52)$$

これを解いて,

$$R_S = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|M|^2}}{2M}, \quad R_L = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|N|^2}}{2N}. \quad (5.53)$$

ただし,

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad B_2 = 1 - |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad (5.53a)$$

$$N = S_{22} - S_{11}^* \det S, \quad M = S_{11} - S_{22}^* \det S \quad (5.53b)$$

である. この時の電力利得 (最大有能電力利得, maximum available power gain) は

$$G_{\text{max}} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| (K - \sqrt{K^2 - 1}) \quad (5.54)$$

となる. ただし, K は安定度係数 (stability factor) と呼ばれ,

$$K = \frac{1 + |\det S|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}S_{21}|} \quad (5.55)$$

であり, 増幅が安定であるための条件は, $K \geq 1$ である.

参考文献

- [1] 太田浩一「マクスウェル理論の基礎」(東大出版会, 2002).
- [2] H. A. Wheeler, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech. **13**, 172-185 (1965).
- [3] D. B. Davidson, "Computational electromagnetics for RF and microwave engineering" (Cambridge Univ. Press, 2005).
- [4] 宮内一洋, 赤池正巳, 石尾秀樹「マイクロ波・光工学」(コロナ社, 1989).
- [5] 市川古都美, 市川裕一「高周波回路設計のための S パラメータ詳解」(CQ 出版社, 2007).

物理屋のための電子回路論 第9回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年11月30日

5.3.5 高周波デバイスのSパラメータ表示

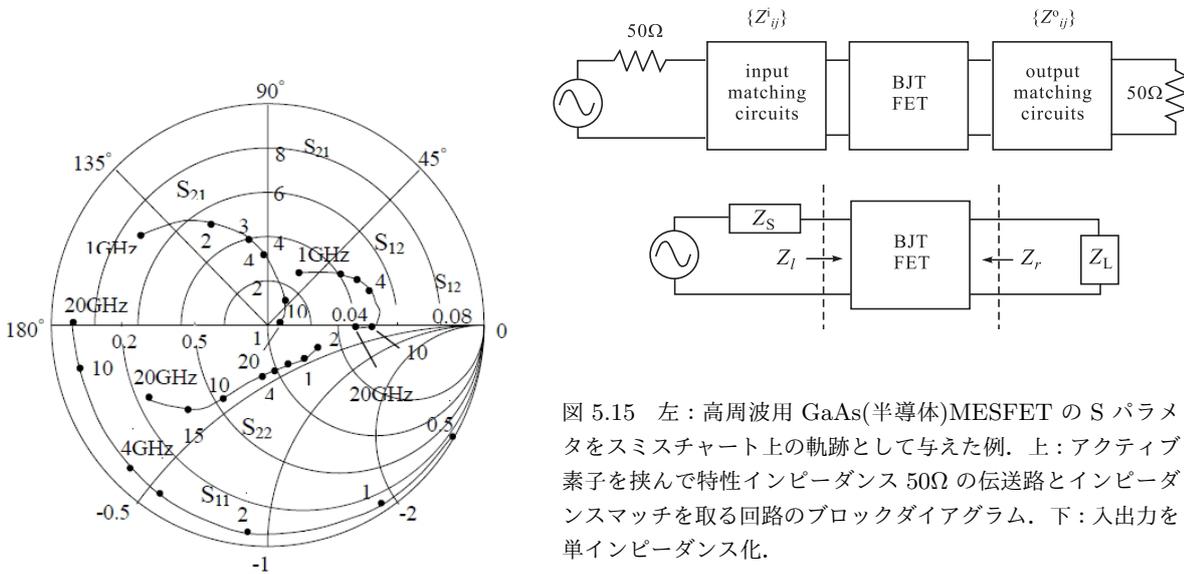


図 5.15 左：高周波用 GaAs(半導体)MESFET の S パラメータをスミスチャート上の軌跡として与えた例。上：アクティブ素子を挟んで特性インピーダンス 50Ω の伝送路とインピーダンスマッチを取る回路のブロックダイアグラム。下：入出力を単インピーダンス化。

高周波用バイポーラ接合トランジスタ (BJT) や金属-半導体ショットキー電場効果トランジスタ (MESFET) など、高周波増幅デバイスの用途としては、図 5.15 上図のように、伝送線路からの信号を受けて何らかの増幅動作を行い、負荷の伝送線路へ信号を送り出すこと、と考えてよい。図では、高周波で頻用される特性インピーダンス 50Ω のラインを仮定している。また、個別デバイスを 4.4, 4.5 節で見たように、適当なバイアスを与えて線形 4 端子回路として扱う。このような高周波用途の増幅デバイスは、図 5.15 左図のように周波数特性を S パラメータの形にまとめて、スミス・チャート上に与えていることが多い*1。この例を見てもわかるように、個別デバイスは 50Ω に調整されているわけではなく (現実問題、付加回路なしで (すなわち IC 化することなく) これまで見た半導体デバイスを 50Ω に調整することは困難である)、3.2.1 節で見たように、何らかの外部負荷回路によってインピーダンス整合を取る必要がある。この時、高周波ではインピーダンスの周波数依存性が大きく、必要な中心周波数、バンド幅更にはノイズ特性も考慮して周辺回路を決定する必要がある。ここでは、考える中心周波数でのインピーダンス整合を中心に考える。なお、信号論については次章で扱う予定である。

図 5.15 上の回路は、鳳-テブナンの定理を使うことで、図 5.15 下の回路へと等価回路変換することができる。注意すべきことは、回路は BJT(FET) 部分によって回路が分断されているわけではない、ということで、左右独立にチューニングを行うと整合が取れていない可能性が高い*2。

*1 通常、規格表には測定値の数表も同時に示されている。

*2 BJT や FET を直列接続 (カスコード接続, cascode connection) することで、接続インピーダンスを高くし、ミラー効果を下げて左右の独立性を上げ、個別のチューニングを可能にすることも行われている。

まず，図 5.15 上のブロック図で，トランジスタ領域左右の信号源，および負荷のインピーダンスは

$$Z_S = Z_{22}^i - \frac{Z_{12}^i Z_{21}^i}{50 + Z_{11}^i}, \quad Z_L = Z_{11}^o - \frac{Z_{12}^o Z_{21}^o}{50 + Z_{22}^o} \quad (5.49)$$

と計算される．次に，これらと，トランジスタを Z パラメタ (インピーダンス行列) で表したものの $\{Z_{ij}\}$ を使って，図 5.15 下で，信号源側からトランジスタ側を見た時のインピーダンス Z_l と，負荷側からトランジスタ側を見た時のインピーダンス Z_r は

$$Z_l = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}, \quad Z_r = Z_{22} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_S + Z_{11}} \quad (5.50)$$

と表される．形式的には，(5.49) と (5.50) をマッチさせれば良い．

5.3.6 S パラメタを用いたインピーダンス整合 [1]

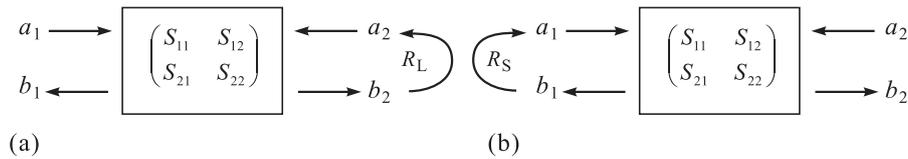


図 5.16 S 行列系へ反射負荷を接続する．(a) ロード側に複素反射係数 r_L の負荷を接続した場合．(b) ソース側に複素反射係数 r_S の負荷を接続した場合．

同じことを，S パラメタを用いて行うことを考える．S パラメタが直接扱うのは波動であるので，ここでは負荷，信号源抵抗等を複素反射係数 (以下しばらく単に「反射係数」と呼ぶ) で表す．これらと例えばインピーダンスなどの間には特性インピーダンスなどの関係が存在する．トランジスタ系が 2 ポート S 行列 $\{S_{ij}\}$ で (5.41) のように表されているとする．図 5.16 のように，(a) ロード側に反射係数 $r_L = a_2/b_2$ の負荷を接続した場合，(b) ソース側に反射係数 $r_S = a_1/b_1$ の負荷を接続した場合をそれぞれ考える．(a) の場合，左から見た反射係数 $r_{in} = b_1/a_1$ は

$$r_{in} = S_{11} + \frac{S_{12} S_{21} r_L}{1 - S_{22} r_L} \quad (5.51a)$$

となる．同様に，(b) の場合，右から見た反射係数は，

$$r_{out} = S_{22} + \frac{S_{12} S_{21} r_S}{1 - S_{11} r_S} \quad (5.51b)$$

となる．

今，(a)，(b) の接続を同時に行い，入出力のインピーダンスが整合しているとする．5.3.1 節で，Z 行列が S 行列を用いて容易に表せる，と述べたように，反射係数も整合しているはずである．ただし，信号の向きが逆であるから，互いに複素共役になっているはずである．

$$r_L = r_{out}^*, \quad r_S = r_{in}^* \quad (5.52)$$

これを解いて，

$$r_S = \frac{B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 4|M|^2}}{2M}, \quad r_L = \frac{B_2 \pm \sqrt{B_2^2 - 4|N|^2}}{2N} \quad (5.53)$$

ただし，

$$B_1 = 1 + |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad B_2 = 1 - |S_{11}|^2 + |S_{22}|^2 - |\det S|^2, \quad (5.53a)$$

$$N = S_{22} - S_{11}^* \det S, \quad M = S_{11} - S_{22}^* \det S \quad (5.53b)$$

である．この時の電力利得 (最大有能電力利得, maximum available power gain) は

$$G_{\max} = \left| \frac{S_{21}}{S_{12}} \right| (K - \sqrt{K^2 - 1}) \quad (5.54)$$

となる。ただし、 K は安定度係数 (stability factor) と呼ばれ、

$$K = \frac{1 + |\det S|^2 - |S_{11}|^2 - |S_{22}|^2}{2|S_{12}S_{21}|} \quad (5.55)$$

であり、増幅が安定であるための条件は、 $K \geq 1$ である。

5.4 非 TEM モード伝送路と LC 伝送路

分布定数回路を導入した際には、ごく一般の特性インピーダンスを考えたが、断面に2つの導体部分を持つような TEM モードを主モードを持つような伝送路では、図 5.1(c) のように直列に L 、並列に C が入っているリアクタンス成分を考えた。これは、同軸ケーブルではそれぞれ芯線周りの磁場、芯線-シールド間の電場を代表している。導波管のような TEM モードを持たない伝送路を分布定数回路で考えるには、伝送方向の磁場ないしは電場を何らかの形で導入する必要がある。この場合は、伝送方向に定在波状態が現れ、伝播に分散が生じ、有効質量が現れる。有限エネルギーを持ちながら空間的には静止している状態が現れることになる。このような分布定数回路は、質量を持った波の方程式、例えばシュレディンガー方程式をシミュレートしている、と言えなくもない。

図 5.17 のように、 C に並列に L を挿入し、伝播方向に磁場を導入することを考えてみる [2]。この時、 L の「実体」の代表であるコイルは、 C とは逆で直列接続で加算的になるものなので、物理的に考えるとやや抵抗があるが、ここでは抽象的に「合成アドミタンスは横幅 dx に比例」とかんがえる。このため、線要素のインダクタンス L は「単位長さの逆数あたりのインダクタンス」というちょっと普通でない物理次元を持つ。一方 C は単位長さあたりであるから、共鳴周波数 $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ は従って、普通に $1/(\text{時間})$ の次元となる。

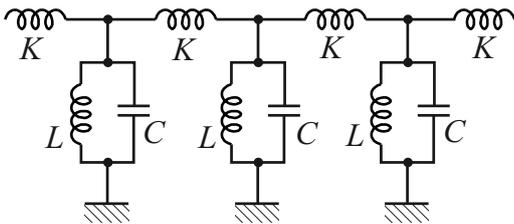


図 5.17 LC 伝送路で分散を与えるため、分布キャパシタに並列に分布インダクタンスを加えてみた。

この場合、7-2 ページの図の設定で、直列インピーダンス、並列アドミタンスはそれぞれ、

$$Z = i\omega K, \quad Y = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{i\omega L} \quad \left(\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$$

であるから、(5.3) の $\kappa \equiv ik$ は次のように書くことができる。

$$ik = \kappa = \sqrt{YZ} = i \sqrt{\frac{K}{L} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (5.56)$$

$K/L \equiv \eta^2$ と置く。インダクタンス K は普通に単位長さあたりであるから、 η の物理次元は $1/(\text{長さ})$ である点に注意。これは、モードの平行成分に対する垂直成分の割合を表している。 $\omega \gg \omega_0$ では、 $k \sim \eta(\omega/\omega_0)$ となって分散が生じず、質量はゼロである。これは、挿入した L の効果が $1/i\omega L$ で小さくなるため当然であるが、この時の波の伝播速度は、 $c^* = \omega/k = \omega_0/\eta = 1/\sqrt{KC}$ で、TEM モードと同じで比誘電率の分を考慮した光速である。

挿入 L の効果が出る $\omega \sim \omega_0$ の範囲で考える。 $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ として $\delta\omega/\omega_0$ について 1 次まで展開すると、

$$k^2 \approx 2\eta^2 \frac{\delta\omega}{\omega_0} \quad \therefore \epsilon \equiv \hbar\delta\omega = \frac{\hbar k^2}{2(\eta^2/\omega_0)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad \left(m^* \equiv \frac{\hbar\eta^2}{\omega_0} \right) \quad (5.57)$$

となって、確かに質量 m^* を持つ粒子と同じ分散関係が局所的に現れていることがわかる。なお、線形な分散を持つ波動に摂動で質量を生じさせた場合の一般的な性質として、

$$E_0 = \hbar\omega_0 = \frac{\hbar\eta^2}{\omega_0} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\eta} \right)^2 = m^* c^{*2} \quad (5.58)$$

が現れている。これはもちろん、線形分散を持つ (分散のない) 波動では、群速度が慣性座標間で不変でローレンツ変換と同形の座標変換に対して不変量が存在してこれをエネルギーに置いたことから来ている。すなわち、式 (5.56) は、 $E = \hbar\omega$, $\epsilon_0 = \hbar\omega_0$, $p = \hbar k$ と置くと

$$E^2 = E_0^2 + p^2 c^{*2} \quad (5.59)$$

というローレンツ不変なエネルギーの定義そのものである。 $k = 0$ での静止した波は、速度 c^* の波と $-c^*$ の波との合成で生じたものであり、その運動エネルギー分が mc^{*2} という事もできる。更に、やや広げすぎではあるが、Dirac 方程式で粒子の速度が良い量子数でなくなり c と $-c$ の間を Zitterbewegung (ふるえ運動, trembling motion) しながら運動する状態となっている、という事に通じる話でもある。

5.5 非線形 LC 伝送路と戸田格子

前節では、本来 TEM モードが主モードである伝送路に伝送方向の磁場成分を導入することで分散を持たせる試みを紹介した。ここでは、更に、分布定数を形成する素子に敢えて非線形素子を使用することで、現実の力学系では実現が難しい非線形線路を作り出す実験研究について紹介しよう。

5.5.1 戸田格子

非線形波動の様々な興味深い性質は、有名な Scott-Russell のソリトン (孤立波) 観測を始め、かなり以前より色々知られていた。本格的に数学的解析が行われるようになったのは、Fermi-Ulam-Pasta が MANIAX という電子計算機を使った計算機実験で、非線形のばねで質点をつないだ力学系で不思議な再帰現象を見出してからである。

非線形力学系の中でも興味深い現象を見せ、様々な解析的結果が得られる「完全可積分系」であることで良く知られているのが戸田格子 (Toda lattice) であり、戸田ポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar \quad (ab > 0) \quad (5.60)$$

を持つばねでつながれた質点系である。運動方程式は

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -a \exp[-b(u_{n+1} - u_n)] + a \exp[-b(u_n - u_{n-1})] \quad (5.61)$$

であり、相対変化 $r_n \equiv u_{n+1} - u_n$ に対しては、

$$m \frac{d^2 r_n}{dt^2} = a(2e^{-br_n} - e^{-br_{n+1}} - e^{-br_{n-1}}) \quad (5.62)$$

となる。相対変化 r とばねの力 f の関係

$$f = -\phi'(r) = a(e^{-br} - 1) \quad (5.63)$$

を用いると、さらに

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \left(1 + \frac{f_n}{a} \right) = \frac{b}{m} (f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n) \quad (5.64)$$

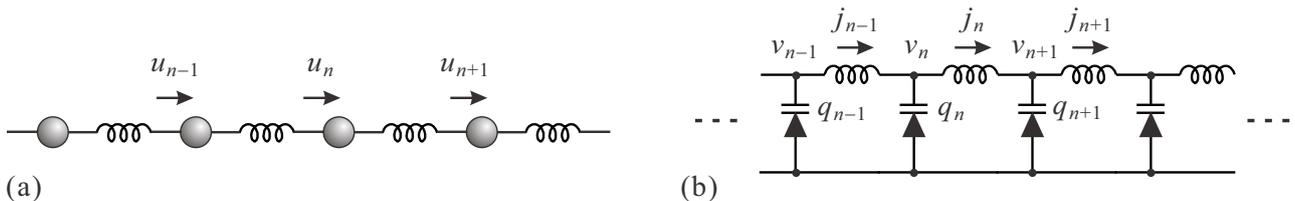


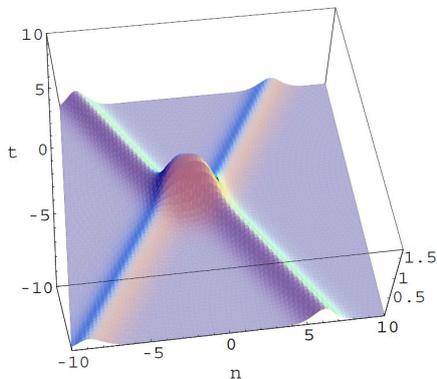
図 5.18 (a) ばねでつながれたおなじみ 1 次元質点系。しかし、(5.60) のポテンシャルを採用すると、戸田格子と呼ばれる非線形格子となる。(b) LC ラダー回路。C 部分にバリキャップを使用している。

と書き換えられる。

戸田格子では様々な解析解が知られているが、有名なものとしてソリトン (soliton) 解がある。

$$u_n = \omega^2 \operatorname{sech}^2(\kappa n + \sigma \omega t + \delta), \quad \sigma = \pm 1, \quad \omega = \sinh \kappa, \quad \kappa, \delta : \text{constants} \quad (5.65)$$

の形に書かれる孤立波である。\$N\$ 個の相互作用するソリトンの解も存在し、\$N = 2\$ の場合は、



$$u_n = \frac{\tau_{n+1}\tau_{n-1}}{\tau_n^2} - 1, \quad (5.66a)$$

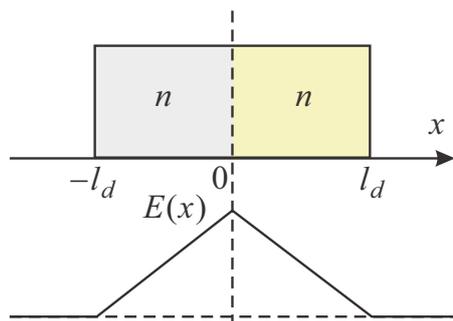
$$\tau_n = 1 + e^{2\eta_1} + e^{2\eta_2} + A_{12}e^{2(\eta_1+\eta_2)}, \quad (5.66b)$$

$$\eta_i = \kappa_i n + \sigma_i \omega_i t + \delta_i, \quad \sigma_i = \pm 1, \quad \omega_i = \sinh \kappa_i, \quad (5.66c)$$

$$A_{12} = \frac{ab \sinh^2(\kappa_1 - \kappa_2) - m(\sigma_1 \omega_1 - \sigma_2 \omega_2)^2}{m(\sigma_1 \omega_1 + \sigma_2 \omega_2)^2 - ab \sinh^2(\kappa_1 + \kappa_2)} \quad (5.66d)$$

で表される。左図が良く非線形系に現れる孤立波の性質を表すものとして提示される2ソリトン解の時間発展の様子を示すもので、反対方向に進むソリトンが衝突し、2つの波の振幅よりも高い波高を示したのち、再び2つに分かれて伝播し、かつ衝突点でどちらかと言えば交差というより向きを反転して進んでいる様子がわかる。

5.5.2 非線形キャパシタ



非線形なキャパシタの代表は、バリキャップ (varicap) と呼ばれる素子で、その中身は第6回で紹介した半導体のpn接合である*3。

pn接合が非線形な電気容量を与えることは、左図のような簡単なモデルから容易に理解できる。簡単のため、p側のアクセプター濃度、n側のドナー濃度は等しく \$n\$ であるとする。外部電圧ゼロでも、p側の正孔はエントロピー増大圧力によりn側に出てこのため接合面からの距離 \$l_d\$ の部分で電荷を中和する正孔がおらずイオン化アクセプターによって負に帯電した状態になっているとする。n側でもこれに对称な効果が生じ \$l_d\$ の領域で正に帯電している。この状態を接合面を挟んだキャパシタと考えると、接合全体にかかる電圧 (電流電圧特性を見た時とは逆方向に正極を取る) は誘電率を \$\epsilon\$ として、

$$V_b = \frac{en}{\epsilon} \int_{-l_d}^0 2(x+l_d)dx + \frac{en}{\epsilon} \int_0^{l_d} 2(l_d-x)dx = \frac{2enl_d^2}{\epsilon} \quad (5.67)$$

である。\$V_b\$ と同じ方向 (すなわち逆方向) 電圧 \$V\$ を印可して、電荷 \$Q\$ が接合にたまるとすると、接合の面積を \$S\$ として、

$$V + V_b = \frac{2en}{\epsilon} \left(l_d + \frac{Q}{nS} \right)^2 \quad \therefore C = \frac{dQ}{dV} = \sqrt{\frac{\epsilon}{2en}} \frac{nS}{\sqrt{V + V_b}} \quad (5.68)$$

となる。\$V \gg V_b\$ であれば、\$C \propto V^{-0.5}\$ となって、論文 [?] にある非線形キャパシタの記述と合致する。

*3 論文 [?] では、「電圧に容量が依存するキャパシタ」とあるだけで、本当は何なのか不明である。\$C \propto V^{-0.49}\$ とあることからバリキャップと判断した。

5.5.3 L-Varicap 伝送路

そこで、このバリキャップとインダクタによる伝送線路 (図 5.18(b)) を考える。非線形であることから、改めて回路方程式を立てると、

$$L \frac{dJ_n}{dt} = v_n - v_{n-1}, \quad (5.69a)$$

$$\frac{dq_n}{dt} = J_{n-1} - J_n, \quad (5.69b)$$

$$q_n = \int_0^{v_n} C(V) dV, \quad C(V) = \frac{Q(V_0)}{F(V_0) + V - V_0} \quad (5.69c)$$

となる。バリキャップには V_0 のバイアス電圧を加えているとした。(5.68) の分母で $V + V_0 = V_0 + \delta V$ として、 δV について展開し、改めて δV を V と書き換えれば (5.69c) の形にできることがわかる。図 5.18(b) で $v_n = V_0 + V_n$ とすると、

$$q_n = Q(V_0) \log \left[1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right] + \text{const.} \quad (5.70)$$

であるから、

$$\frac{d^2}{dt^2} \log \left[1 + \frac{V_n}{F(V_0)} \right] = \frac{1}{LQ(V_0)} (V_{n-1} + V_{n+1} - 2V_n) \quad (5.71)$$

となって、(5.61) と同形式になることがわかる。

参考文献

- [1] 市川古都美, 市川裕一「高周波回路設計のための S パラメータ詳解」(CQ 出版社, 2007).
- [2] 北野正雄「量子力学の基礎」(共立出版, 2010) でも同じことをしている。
- [3] 勝本信吾「メゾスコピック系」(朝倉書店, 2002), 「半導体量子輸送物性」(培風館, 2014).
- [4] 勝本信吾「量子の匠」(丸善, 2014).

付録 G: スミスチャートによるインピーダンス整合

スミスチャートを使ったインピーダンス整合は、直感が働きやすく、かつて現場で適当に集中定数素子を挿入して整合させていた際は良く使用されていた。また、周波数の範囲をある程度取る必要がある場合に、どのように整合から外れていくかを見るにも良いと考えられていた。現在では現場でスミスチャートを使用することはほとんどないと

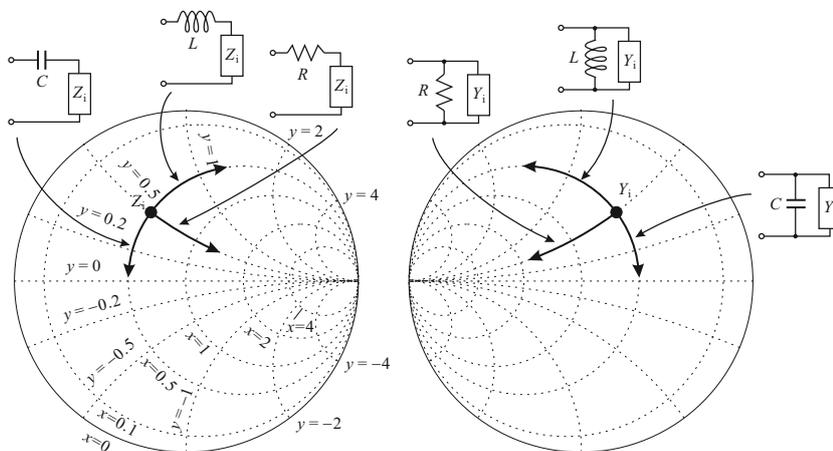


図 G.1 左: 負荷抵抗 Z_i を伝送路にマッチさせるために、直列に抵抗、リアクタンスを挿入した場合、スミスチャート上で、それぞれ定リアクタンス円、定抵抗円上を動かすため、これを使って原点 (反射ゼロ) 付近へ移動させる。右: 並列に挿入する場合は、アドミッタンスチャートで考え、やはり定サセプタンス (リアクタンスの逆数) 円、定コンダクタンス円上を動かす。

思うが、高周波回路の学習の際に何が起きているのか視覚に訴える効果などは現在でも重視され、回路の教科書などには生き残っている。

図 G.1 は、単純なインピーダンス (アドミッタンス) で終端した場合の整合を取る作業を示したものであるが、多くはこのように、集中定数回路素子を直列/並列に挿入して反射係数ゼロの、円の中心付近へ向けて移動する作業である。異なる方法としては、例えば、特性インピーダンスの異なる伝送線路を挿入する、などもある。この場合は、これらのいずれでもなく円の中心を中心として回転する (したがってこの作業だけでは反射は低減しない)。

物理屋のための電子回路論 第10回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年12月6日

第6章 信号, 雑音, 波形解析

これまで電(磁)氣的信号を取り扱う文字通りの「回路」を考えるための様々な概念を開発してきた。電子回路は電磁場を用いて情報を(増幅も含めて)伝達したり,あるいはエネルギーを伝達するもの,であった。これらをすべてひっくるめて「信号」(Signals)と呼ぶことにしよう。本章では,信号,および電子回路的にはその対立概念としての「雑音」(Noises)について見ていくことにしよう。「それは順序が逆ではないか,信号や雑音の物理的性質をきちんとみてからそれを扱う回路を考えるべきではないか」と思われる方もいると思うし,そのようなアプローチも当然存在する。が,それは統計物理学系の講義の守備範囲である。電子回路論には電子回路ならではの不思議な(面白いと思う人,怪しいと思う人もいるかもしれない)アプローチがあり,ここではそれを紹介したい。そのためには,これまでの概念開発が必要だった,ということである。

まず,雑音すなわちゆらぎの議論から始めよう。ここでいう「ゆらぎ」とは,人間が制御できない確率的な事象を指す。現実の雑音には様々な種類がある。統計物理で扱うのは熱雑音やショット雑音など,物理系が本来的に持っている雑音である。揺動散逸定理は,ゆらぎ(雑音)とエネルギー散逸の関係を与える。また,ポップコーン雑音,バルクハウゼン雑音など,回路素子内の内的要因による雑音だが回避可能なもの,も重要な雑音である。

電子回路論では,外部から飛来する電磁雑音の排除も極めて重要である。また逆に,特に高周波信号を扱う際に回路から飛び出してしまう電磁波による妨害(electromagnetic interference EMI,あるいは,electromagnetic compatibility EMC)も大きな課題である。

信号波形論も,積分変換による波形解析,サンプリング論,また変調を用いた信号伝送工学など間口が広いが物理実験に役立つようなものを選んで講じる。

6.1 ゆらぎ

これまで,電位(電圧),電流を主に「信号」と考え,これらを表す入力関数 $f(t)$,出力関数 $g(t)$ というように抽象化して議論してきた。しかし,これらの現実の物理量には必ずゆらぎが存在し,電子回路論の言葉では「雑音」である。雑音には様々な要因が存在し,要因によって分類することができる。この中で,外部から飛来する電磁ノイズは,電子回路的には極めて重要な問題であり,これを避けるための一般的な手法については後で簡単に紹介する。

物理量 x のゆらぎ δx , および平均2乗偏差 $\overline{(\delta x)^2}$ を

$$\delta x = x - \bar{x}, \quad \overline{(\delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (6.1)$$

で定義する。ゆらぎの平均はゼロ $\overline{\delta x} = 0$ である。 x の分布関数 $g(x)$ に対してそのフーリエ変換

$$u(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ixq} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (6.2)$$

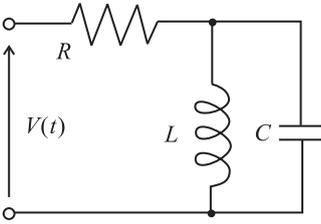
を考えると、 $u(q)$ をテーラー展開することで、

$$\overline{x^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{i^n} \left[\frac{d^n}{dq^n} u(q) \right]_{q=0} \quad (6.3)$$

が得られる。従って、高次のモーメントが得られれば $u(q)$ を通して $g(x)$ が得られる (現実にはこれは多くの場合困難である)。 $u(q)$ を分布の特性関数という。

今、 δx を「ゆらぎ」、 $\overline{\dots}$ を「平均」としたが、何に対してゆらぐのか区別する場合もある。系 (アンサンブル) を取り直すたびに何らかの確率過程が入って系の示す物理量に揺らぎが生ずる場合、各確率過程は独立事象である。ここでは、 $\overline{\dots}$ としてこのようなゆらぎに関する平均を意味することにする。これに対して、 x が何らかの確率的摂動によって時間 t に対してゆらぐ場合、 $x(t)$ の値は直前の値の影響を受けることになる。このような揺らぎに対する平均を $\langle \dots \rangle$ のように書くことにする。摂動が全くランダムで $x(t)$ は直前の値にのみ影響される場合を **単純マルコフ過程** (simple Markov process) と呼ぶ。 $x(t)$ がそれより前の m 個の値、 x_1, \dots, x_m から影響を受ける場合、これを m 重マルコフ過程と呼ぶ。

6.1.1 揺動散逸定理



久保亮五らによって確立・定式化された線形応答理論中の重要な要素、**揺動散逸定理** (fluctuation-dissipation theorem) の考え方を平たく言うと次のようになる。散逸のある系で散逸するエネルギーと外界 (熱浴) から入り込むエネルギーがバランスして定常状態にあるとする。エネルギーのやり取りには揺らぎ (揺動) があり、これが熱力学諸量のゆらぎを生む。従って、散逸とゆらぎとの間に一定の関係が生じる。

何度も出てきた左図の散逸のある LC 共鳴回路を例に、まず揺動散逸定理の紹介だけをしよう。インピーダンス、アドミッタンスはそれぞれ、

$$Z(i\omega) = \frac{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad Y(i\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{R(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega L}$$

と表される ($\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$)。

この時、揺動散逸定理 (第 2 種) は、電圧 $V(t)$ の熱雑音パワースペクトル $G_v(\omega)$ として、

$$G_v(\omega) = 4k_B T \text{Re}[Z(i\omega)] \quad (6.4)$$

を与える。雑音エネルギー散逸を生じる抵抗 (あるいは、コンダクタンス) 成分により生じるとしている。

上の回路に適用すると、

$$G_v(\omega) = 4k_B TR \quad (6.5)$$

となり、電圧雑音は ω に依存しない (白色)。 (6.5) のような熱雑音を **ジョンソン-ナイキスト雑音** (Johnson-Nyquist noise) と呼ぶ。このジョンソン-ナイキスト雑音の表式に対する電子回路的な簡単な証明は、すぐ後のナイキストの定理で示すことにする。

6.1.2 ウィナー-ヒンチンの定理

ウィナー-ヒンチン (Wiener-Khinchine) の定理は、「揺動散逸定理」と呼ばれる一連の理論の一部である。結果だけ述べる。時間 t に対する揺らぎを持つ量 $x(t)$ に対して **自己相関関数** (self-correlation function) を

$$C(\tau) = \overline{\langle x(t)x(t+\tau) \rangle} \quad (6.6)$$

で定義する。前に述べたとおり、 $\langle \dots \rangle$ は時間平均を意味し、 $\overline{\dots}$ は更にアンサンブル平均を取ることを意味している。

この時、振動数 ω に対するスペクトル密度 (spectrum density, power spectrum) を $G(\omega)$ とすると、ウィナー-ヒンチンの定理は、

$$G(\omega) = 4 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (6.7a)$$

$$C(\tau) = \int_0^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau \frac{d\omega}{2\pi} \quad (6.7b)$$

と書かれる。すなわち、時間揺らぎの自己相関関数とスペクトル密度はフーリエ変換で結ばれる関係にある。

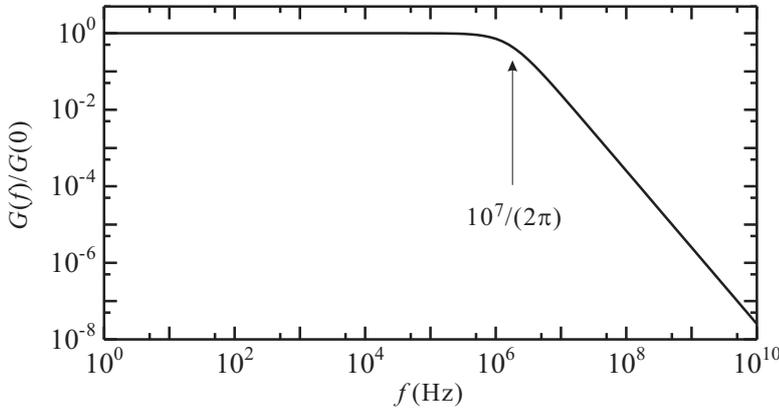


図 6.1 式 (6.9) で $\tau_0 = 1 \times 10^{-7}$ s (周波数で 10MHz) として $f = 0$ でのパワースペクトル $G(0)$ で規格化したスペクトル値を周波数 f の関数として log-log プロットしたもの。増幅器 Bode ダイアグラムのように、 $1/(2\pi\tau_0)$ の所に 2 次の「ポール」が現れている。

相関関数 $C(\tau)$ が

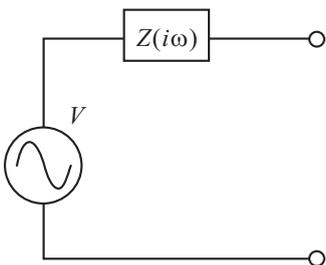
$$C(\tau) = \exp(-\tau/\tau_0) \quad (6.8)$$

と指数関数的であるとすると、パワースペクトル $G(f)$ は

$$G(f) = 4 \int_0^{\infty} e^{-\tau/\tau_0} \cos(2\pi f \tau) d\tau = \frac{4\tau_0}{1 + (2\pi f \tau_0)^2} \quad (6.9)$$

である。これは無論、図 6.1 のように、log-log プロットで $2\pi f \tau_0 = 1$ の所に 2 次の「ポール」を生じる関数である。増幅器のところでも見たように、このポール以下の周波数ではスペクトルはほぼ f によらず白色であり、ポールを超えると f^{-2} で減少する。

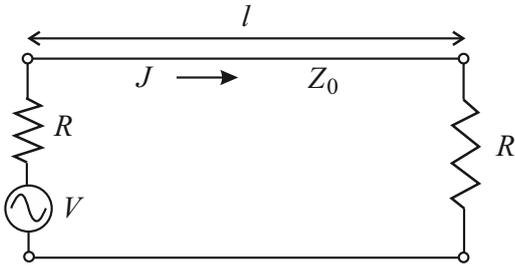
6.1.3 雑音の回路論的取扱い



これまで電磁場を「あの手この手」で飼いならすため、様々な概念開発をしてきたが、これらを使ってゆらぎを電子回路で扱ってみよう。例えばトランジスタを制御電源として表してしまったように、回路の言葉の上に乗せることを考える。雑音は信号の上にゆらぎが乗っているものだと考えると、回路の線形性を破るものではない。しかし、何らかのエネルギー源によって様々な周波数の重ね合わせの「ゆらぎ信号」を発生させているとすると、回路内エネルギー保存則を破るため、やはり「電源」として扱うのが適当であると考えられる。

(6.4) の揺動散逸定理は、インピーダンス $Z(i\omega)$ に生じる電圧ゆらぎを扱っているので、左図のように、雑音の存在しない出力インピーダンス $Z(i\omega)$ と、「雑音電圧電源」 V の組み合わせが考えられる。場合によっては雑音電流電源を考える。以下、雑音電圧電源の物理的性質として、線形性を仮定する。特に平均特性そのものが非線形な素子ではこれは多くの場合成立しないが、これまで見たように、小振幅近似などにより線形近似が適用できるとする。

6.1.4 ナイキストの定理



熱雑音に関するナイキストの定理 (Nyquist theorem) は、これも揺動散逸定理の一部であり、具体的には (6.5) の形で、抵抗 R の両端に生ずる電圧熱雑音を (6.5) として与えるものである。これには、電子回路の研究者でもあったナイキストらしい、大変直観的な説明がある。

左図のように、抵抗値 R の抵抗体 (ノイズ源 V を含む) にインピーダンス整合 ($Z_0 = R$) した長さ l の伝送線を接続し、もう一方の端も R の抵抗体で終端する。伝送線の Z_0 はすべてリアクタンス、すなわち直流抵抗はゼロ (無損失) とする。この伝送線

路を伝わる信号 (電磁波) の速さを c^* とする。伝送線は終端の抵抗以外では外界から切り離されており、終端抵抗を通して外界とエネルギーをやり取りし、抵抗体と熱平衡にあるとする。この時、右側の負荷抵抗でも熱雑音の発生があるはずであるが、考慮しない、というのは、今考えているのは左側の雑音電源であり、仮に右を考えたとしても線形性により重ね合わせが生じるだけで何も推論に影響を与えないからである。

伝送線路上に存在するモードの密度を考えるため、長さ l で周期境界条件を取ることにすると、 n 番目のモード ω_n は

$$\omega_n = c^* k_n = \frac{2\pi n c^*}{l} \quad (6.10)$$

である。従って、1つのモードあたりの振動数幅は、 $\delta\omega = 2\pi c^*/l$ となる。この「モード」は双方向なので、自由度 2 を持っている。

エネルギー $\hbar\omega$ のフォトンについて確認しておく、ボース分布 $f(\hbar\omega, T) = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}$ に従い、1自由度あたりのエネルギー密度は

$$\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1} \sim \frac{\hbar\omega}{1 + (\hbar\omega/k_B T) - 1} = k_B T \quad (k_B T \gg \hbar\omega) \quad (6.11)$$

である。従って、振動数幅 $\Delta\omega$ あたりの熱雑音 (フォトン) のエネルギーは

$$2 \frac{\Delta\omega}{\delta\omega} k_B T = \frac{2k_B T l}{2\pi c^*} \Delta\omega \quad (6.12)$$

となる。

伝送線の端はインピーダンスマッチしているため、熱雑音フォトンが反射されることなく端から流れ出て終端抵抗に吸収される。(6.12) のエネルギーの内、半分が一方の方向へ進むから、単位時間内に片方の端から流れ出る $\Delta\omega$ あたりのエネルギーは、単位長さあたりのエネルギーにするため $1/l$ を乗じ、フォトン速度 c^* を乗じることで、

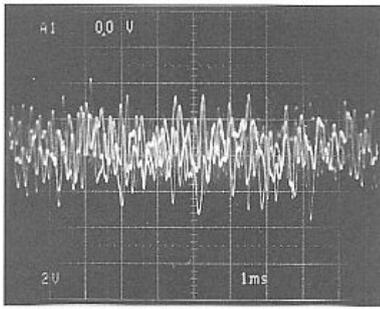
$$\frac{k_B T l}{2\pi c^*} \Delta\omega \times \frac{1}{l} \times c^* = k_B T \Delta f \quad (2\pi f = \omega) \quad (6.13)$$

である。この分が反対側から供給されているはずであるから、左の「ノイズ電源」は単位時間当たりこれだけのエネルギーを伝送線に供給しているはずである。負荷に流れる電流を J として、上のエネルギーが $\overline{J^2} R$ になること、また、図からわかるように、電流は $2R$ の直列抵抗を巡回する形になる (伝送路に負荷 R がつながった状態を右から見ると、インピーダンス R に見える) ので、片側の抵抗の電圧を V とすると、 $J = V/2R$ となることから、

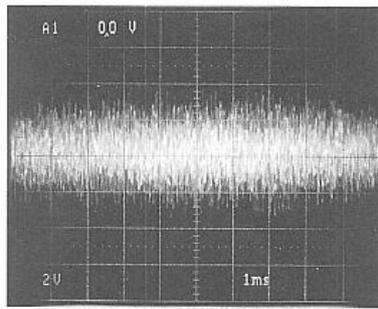
$$\overline{J^2} R = k_B T \Delta f, \quad \overline{V^2} = 4R k_B T \Delta f \quad (6.14)$$

となる。これが、(6.5) と同じものを意味している (今考えているのは雑音そのものの電力であるから $V \rightarrow \delta V$ とする) ことは明らかである。また、(6.14) より

$$\sqrt{\overline{J^2 V^2}} = 2P = 2k_B T \Delta f \quad (6.15)$$



a) 上限周波数5 kHz (-3dB) 1 V_mの熱雑音を1 ms/divで観測



b) 上限周波数100 kHz (-3dB) 1 V_mの熱雑音を1 ms/divで観測

図 6.2 抵抗の熱雑音を (ローパス) 周波数フィルターを通して増幅した後、オシロスコープで観察したもの. (a) 上限周波数 5kHz (-3dB), (b) 上限周波数 100kHz (-3dB). [2] より.

となる. P はノイズ電力で, 2倍が付いているのは交流電力の時間平均を取っているからである.

ジョンソン-ナイキスト雑音 (6.5) の表式は, 抵抗値がほとんど温度に依存しない合金などの抵抗器を使うと (無論, 温度に依存する場合でも各温度で抵抗 (の平均値) を測れば良いが), 雑音パワースペクトルを測定することで温度が測定できることになる. この雑音温度計の特徴は, 他に温度標準を必要としないことで, 温度計の分類としては1次温度計に属する. 特に高い温度では高温近似が広い周波数範囲で良好で, 雑音も熱雑音が主になることから良く使用されている.

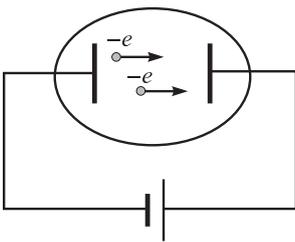
更に, ジョンソン-ナイキスト雑音とは限らない雑音源があったとして, バンド幅 Δf に対する雑音電力を P として $P/k_B\Delta f$ を雑音温度 (noise temperature) と呼ぶことがある.

以上, 熱雑音について, 周波数軸上で平ら (白色) になる, というを見てきたが, これを時間軸上で見ると, 図 6.2 のようになる. これだけではわかりにくい, 確率過程であることを反映して, 雑音振幅を統計集計すると, ガウス分布になっている.

6.1.5 ショット雑音

電流の起源である電荷キャリアは, 一般に電子のように粒子である. 電流がキャリアの確率的 (stochastic) な運動によって引き起こされると, それによって揺らぎが生じる. この揺らぎ (ノイズ) をショット雑音 (shot noise) あるいはポアソン雑音 (Poisson noise) と呼ぶ*1.

ショット雑音が顕著になるのは, 測定している電流に寄与する粒子数が小さくなった場合である. また, その発生要因からわかるように, ジョンソン-ナイキスト雑音と違って温度を下げて消えることはない.



図のように, 真空中に対抗電極を置いて電圧を印加し, 一方の電極 (カソード) から電子が飛び出して他方 (アノード) に飛び込むことで流れる電流を考える. カソードから飛び出した電子は強電場によって加速されアノードに飛び込むが, 電場が十分強ければ, 飛び出した時の初速のばらつきは無視できるので, この電流のショット雑音は電子がカソードから飛び出す確率過程によっている.

ショット雑音のスペクトルを次のように考えて求めよう. 上記のようにショット雑音を生じるような電荷の運搬過程では電荷 e が真空管を横切って (他のモデルでも, これに相当するプロセスがあるはずである) 電極に到達する時間は, ゆらぎの測定時間幅 τ に比べて無視できるほど短い. すなわち, 電流は時間軸上のデルタ関数列で表され, デルタ関数の周波数スペクトルは完全に白色で一定である.

まず, 1個の電子による電流 $J_e(t) = e\delta(t - t_0)$ を考えると,

$$J_e(t) = e \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f(t-t_0)} df = 2e \int_0^{\infty} \cos [2\pi i f(t - t_0)] df$$

となって, どの周波数成分に対しても一様な振幅 $2e$ を有する. この余弦波振動成分を, 1個の電子のその周波数に

*1 これも当然ながら電氣的雑音に限らず, 何らかの粒子の流れがもたらす物理量すべてに存在する揺らぎである.

おける「ゆらぎ」と考える。これらは $t = t_0$ でコヒーレントであるが、ここから離れると無相関である。無限小幅のバンド df を考え、 df に属する周波数成分で周期平均を取ると、

$$\delta J = d\sqrt{\langle J_e^2 \rangle} = \frac{2e}{\sqrt{2}} df = \sqrt{2} e df$$

である。次に、2 個めの電子が飛んできて電流が 2 つのデルタ関数で表されるとする。2 つのデルタ関数の決まった周波数のゆらぎ成分の間には一定の位相関係があるから、ある f に対する 2 つの電流ゆらぎを j_p, j_q で表すと、

$$\overline{\langle \delta j^2 \rangle} = (j_p + j_q e^{i\phi})(j_p + j_q e^{-i\phi}) = j_p^2 + j_q^2 + 2j_p j_q \cos \phi$$

となる。しかし、このプロセスを何度も繰り返してアンサンブル平均を取ると、結局プロセス間の ϕ は無相関であるから最後の干渉項は消える。すなわち、

$$\overline{\langle \delta j^2 \rangle} = j_p^2 + j_q^2 = 2 \times (\sqrt{2}e)^2 df$$

である。同様に、電子数を増やして単位時間あたり平均 N 個にしたとすると、 $\bar{J} = eN$ より帯域 Δf に対する電流揺らぎは

$$(\delta J)^2 = N \times 2e^2 \Delta f = 2e\bar{J}\Delta f \quad (6.16)$$

という形に得られる。

pn 接合 (4.3.1 節) では (揺らぎを平均した) 電流電圧特性は

$$J(V) = J_0 \left[\exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) - 1 \right] \quad (4.10)$$

であった。これを、微分抵抗 $r_d = dV/dJ$ を J の関数として表す形にすると、

$$r_d = \left(\frac{dJ}{dV}\right)^{-1} = \left[\frac{eJ_0}{k_B T} \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right)\right]^{-1} = \frac{k_B T}{e} \frac{1}{J + J_0} \quad (6.17)$$

となる。順方向電圧が印加され $J \gg J_0$ である状況を考え $r_d \sim k_B T/eJ$ と近似すると、(6.16) より、

$$(\delta J)^2 = 2e \frac{k_B T}{e r_d} \Delta f = 4k_B T \frac{1}{2r_d} \Delta f \quad (6.18)$$

であり、 δV の表式にすると、

$$(\delta V)^2 = 4 \frac{r_d}{2} k_B T \Delta f \quad (6.19)$$

と、熱雑音と類似の形になる。

6.1.6 1/f 雑音

熱雑音とショット雑音に対してパワースペクトルが大まかに周波数 f の逆数に比例する雑音群があり **1/f 雑音** (あるいはフリッカー雑音) と呼ばれている。「雑音群」と書いたように、1/f 雑音の原因は様々であり、ゆらぎの発生メカニズムにより周波数依存性も $1/f^\alpha$ で、 $0.8 \leq \alpha \leq 2$ と必ずしも $1/f$ ではない*2。1/f ゆらぎは 1970 年代以降広く研究され、様々なゆらぎが 1/f 特性を示すことがわかってきた [4]。人間の快不快に関係しているという説もあり、意図的に 1/f でゆらぐ扇風機なども売られた。

電子回路で重要な半導体素子やその他のアクティブ素子で 1/f 雑音が顕著となり始めるのは 1kHz 以下で、100Hz 以下では熱雑音よりも大きくなる。現象論的には、

$$(\delta V)^2 = K J^\alpha (1/f^\alpha) R^2 \Delta f \quad (6.20)$$

のように書かれる。

*2 研究者によっては、1/f にならないものは 1/f 雑音と呼ばない、という人もいる。

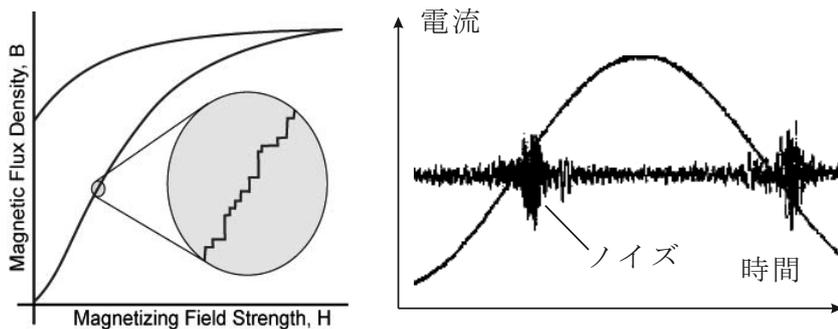


図 6.3 バルクハウゼン雑音. 左: 磁性体の M-H 曲線を拡大してみると, 特に遷移領域で磁区の運動に伴い, 細かな階段状構造が表れている. 右: トランスなどに交流を加えて出力ノイズを調べると, 磁区の離散的な運動に伴って, 特に電流がゼロを切る, 磁性体が遷移領域にさしかかる付近で特異的に雑音が増加する様子が見られる.

6.1.7 雑音の「単位」

以上見てきたように, 雑音は, 周波数帯域あたりのパワースペクトル (電圧, 電流) で表されるので, これを小文字で書いてバンド Δf の標記を略すことが多い.

$$\overline{j_n^2} = \overline{\delta J^2} / \Delta f, \quad \overline{e_n^2} = \overline{\delta V^2} / \Delta f \quad (6.21)$$

のような具合である. ここで, 電圧のノイズスペクトル標記に e という素電荷や自然対数の底と紛らわしい文字を使用した, これも電子回路で良く使用される記号で, 添字を付けて混乱を避ける. また, これからわかるように, 「雑音電流」, 「雑音電圧」の単位として, $\overline{j_n^2}$, $\overline{e_n^2}$ の平方根に相当する $A/\sqrt{\text{Hz}}$, $V/\sqrt{\text{Hz}}$ が使用される.

6.1.8 その他, 実用上重要な雑音

電子回路素子に内在する雑音で様々な原因による雑音について見ておこう. これらも, 回路実装の際の部品選択などで考慮する必要がある.

バルクハウゼン雑音

2つのコイル (インダクタ) を磁氣的に結合して, 交流を伝達できるようにした素子がトランスフォーマーと呼ばれるもので, 単一コイルの自己インダクタンスに対して**相互インダクタンス**で特徴づけられる. このように磁氣的な結合を持ちいる素子でしばしば使用されるのが**強磁性体** (ferromagnet) であり, 磁束を有効的に磁性体内に閉じ込めることができる.

ところが, ここで問題となるのが**バルクハウゼン雑音** (Barkhausen noise) と呼ばれるもので, 磁性体の**磁壁** (magnetic domain wall) の確率的な動きによって生じる. 強磁性は多くの場合, 物質内の局在磁気モーメントが空間的な向きをそろえることで生じるが, 外部磁場に応答して物質全体の磁気モーメントは変化する. これは, 磁性体内部に**磁区** (magnetic domain) と呼ばれる小区画が生じて磁束をループ状に閉じ込めて磁気エネルギーを下げており, 外部磁場に依ってこの区画の区切りである磁壁が動いて全体のモーメントを変化させるからである. 磁壁は境界面の局在磁気モーメントが向きを変えることで運動するが, しばしば不純物や多結晶粒界など物質の不完全性にトラップされ, その動きは確率的になる. これによる雑音がバルクハウゼン雑音である.

このような事情は**強誘電体** (ferroelectric) でも同じであり, 従って強誘電体を絶縁物質に使って容量を稼いでいるキャパシタ (セラミックキャパシタなど) でも同様なノイズが発生する. バルクハウゼン雑音はショット雑音同様, 確率過程によって生じるが, 磁気モーメント, 誘電分極等が階段的に変化 (電信的 (telegraphic) と表現する) するのが特徴で, ショット雑音に比べるとその統計性も普遍性に乏しく, 物質の特性に強く依存する. 磁壁, 誘電壁のトラップされやすさは温度にも敏感であり, 低温では強いトラップのために素子特性そのものが劣化して使用に耐えなくなる.

ポップコーン雑音

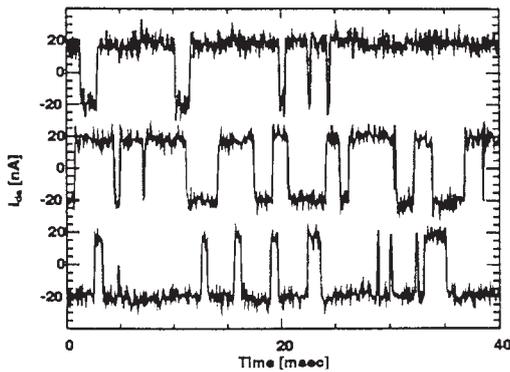


図 6.4 ポップコーン雑音の例. Wikipedia より.

半導体素子では、空間電場領域に格子欠陥などがあって、双安定 (安定状態が 2 つあって、その間を何らかの刺激によって行き来できること) になっていると、安定状態間の遷移に伴って出力が変化し、やはり 2 つの決まった値の間を往來するようになって、これが雑音となる。オーディオアンプ出力として聞いていると、ポップコーンがはぜているようなパチパチという音になって聞こえるため、ポップコーン雑音と呼ばれる。

ポップコーン雑音がある時の出力は、図 6.4 のように、やはり 2 値の間を行き来する電流的雑音になっている。

マイクロフォン雑音

これは外来雑音に分類すべきものかもしれないが、回路実装と関係したものである。原因は簡単で、回路内に機械的に動きやすい部分 (可変キャパシタの羽や、シールドケースの薄くて面積が大きな部分など) があり、浮遊容量を形成していると、これが外部あるいは内部で生じる音波によって振動することで雑音を生じる。

アバランシェ雑音

接合ダイオードに大きな逆方向電圧を加えると、ある電圧で空間電場領域に飛び込んできたキャリアが衝突電離を起こしてキャリア増殖を行い、大きな逆方向電流が流れるようになる。これを電子なだれ (アバランシェ, avalanche) 現象と呼ぶ。この現象は、高速応答する光検出器などに使用されるが、この時、電流は衝突電離が確率過程で生じているため不安定で、多くのノイズを含む。これをアバランシェ雑音と呼んでいる。

6.2 増幅器の雑音

6.2.1 雑音指数 (Noise Figure)

6.1.3 節のように電源として雑音を取り扱えと、増幅器で雑音がどのようになるか、等価回路を使って容易に考えることができる。すなわち、下の図のように、全くノイズのない理想増幅器を考え、その入力部分に雑音電源が付いているとする。

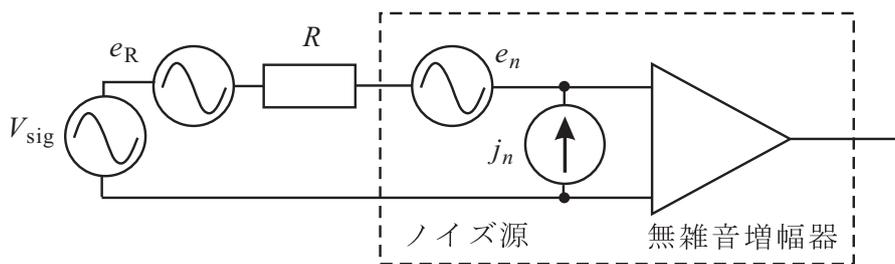


図 6.5 増幅器の雑音を考えるための等価回路。無雑音増幅器の入力部分に雑音電源が存在する。

この回路から、増幅器の電力利得を G_p と置いて、

$$\delta e_{\text{intotal}}^2 = e_{\text{out}}^2 / G_p = j_n^2 R^2 + e_R^2 + e_a^2 \quad (6.22)$$

である。

図 6.5 のような増幅器モデルにおいては、増幅器 (破線内部) を通すことで、信号対雑音比 (SN 比, signal to noise ratio) は必ず悪化する。S/N 比と書くこともあり、電圧の 2 乗、あるいは電力で見た信号と雑音の比である。この

時, 雑音指数 (noise figure) は

$$NF = 10 \log_{10} \frac{(S/N)_{in}}{(S/N)_{out}} = 10 \log_{10} \frac{S_{in} N_{out}}{S_{out} N_{in}} \quad (6.23)$$

と定義される。これは, (3.3) 式の, 増幅度を dB で表したのと同じ表式であり, S/N 比劣化の度合いを示すものである。

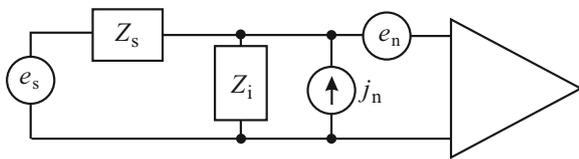
$$N_{out} = G_p \overline{e_N^2}$$

であるから,

$$NF = 10 \log_{10} \frac{S_{in} G_p \overline{e_N^2}}{S_{in} G_p e_R^2} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_N^2}}{e_R^2} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_n^2} + \overline{e_R^2} + \overline{j_n^2} R^2}{e_R^2} \quad (6.24)$$

となる。

6.2.2 ノイズインピーダンスマッチ



次に, 左図のように増幅器の入力インピーダンス Z_i を考えて, 信号源の最適インピーダンスを考える。この場合, 増幅器の入力で換算した雑音温度 T_a と, これにマッチした最適信号源抵抗 R_{bs} は

$$T_a = \frac{\sqrt{\overline{e_n^2} \overline{j_n^2}}}{2k_B}, \quad R_{bs} = \sqrt{\frac{\overline{e_n^2}}{\overline{j_n^2}}} \quad (6.25)$$

で表される。この回路全体を右から見たときの雑音温度 T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\text{Re}(1/Z_i)}{\text{Re}(1/Z_s)}\right) \frac{T_a}{2\text{Re}Z} \left(\frac{|Z|^2}{R_{bs}} + R_{bs}\right), \quad \frac{1}{Z} \equiv \frac{1}{Z_i} + \frac{1}{Z_s} \quad (6.26)$$

となる。 Z_i を調整してこの T_n を最小にする条件は

$$Z_i = \frac{1}{R_{bs}^{-1} - Z_s^{-1}} \quad (6.27)$$

で, この時, T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\text{Re}(1/Z_i)}{\text{Re}(1/Z_s)}\right) T_a \quad (6.28)$$

となる。(6.27) の条件をノイズマッチングと呼ぶ。

参考文献

- [1] C. Kittel, "Elementary Statistical Physics", (Dover, 2004).
- [2] 遠坂俊昭「計測のためのアナログ回路設計」(CQ 出版社, 1997).
- [3] Anton F. P. van Putten, "Electronic Measurement Systems", (IOP pub., 1996).
- [4] 寺本英, 広田良吾, 武者利光, 山口昌哉「無限・カオス・ゆらぎ」(培風館, 1985).

付録 H: ナイキストの定理の古典電子運動論

抵抗値 R を持つ抵抗体を考え, その電子濃度 n , 電流を流す方向の長さ l , 断面積は S であるとする。電子の平均移動速度を v として,

$$V = JR = RSnev \quad (H.1)$$

である。 v は、抵抗体中の全電子の電流方向速度の平均とする。すると、 Slv は抵抗体中の全電子数であるから、電子に指数 i を付けて

$$Slv = \sum_i v_i$$

となり、(H.1) より、

$$V = \frac{eR}{l} \sum_i v_i \equiv \sum_i V_i \quad \left(V_i \equiv \frac{eRv_i}{l} \right).$$

この式において、 V_i はあたかもそれぞれの電子が受け持つ電圧であるかのような形状をしている。それぞれの電子は加速と散乱を繰り返しており、その電流方向成分 v_i はゆらぎを持つ確率変数であるから、 V_i も同様である。そのパワースペクトルを $G(f)$ と書くと

$$\overline{V_i^2} = G(f)\Delta f.$$

相関関数は (6.8) のように電子の運動量緩和時間 τ_0 で減衰すると考えられる。

$$C(\tau) = \overline{V_i(t)V_i(t+\tau)} = \overline{V_i^2} \exp(-\tau/\tau_0).$$

(6.9) より、

$$G(f) = 4 \left(\frac{eR}{l} \right)^2 \overline{v^2} \frac{\tau_0}{1 + (2\pi f\tau_0)^2} \quad (\text{H.2})$$

である。回路の議論 (6.1.4 節) では見られなかったカットオフ (ポール) 周波数が現れているが、これは、金属中の電子の運動量緩和時間によるもので回路の議論では生じなかったのは当然である。これはピコ秒以下の領域であり、無視し、白色スペクトル領域で考える。

エネルギー等分配側より、

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{1}{2}k_B T \quad \therefore \overline{v^2} = \frac{k_B T}{m}$$

であるから、

$$\overline{V^2} = nSl\overline{V_i^2} = nSlG(f)\Delta f = nSl \cdot 4 \frac{k_B T}{m} \left(\frac{eR}{l} \right)^2 \tau_0 \Delta f = 4k_B TR\Delta f \quad \therefore \sigma = \frac{ne^2\tau_0}{m}. \quad (\text{H.3})$$

物理屋のための電子回路論 第 11 回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016 年 12 月 13 日

6.2 増幅器の雑音

6.2.1 雑音指数 (Noise Figure)

??節のように電源として雑音を取り扱えらると、増幅器で雑音がどのようになるか、等価回路を使って容易に考えることができる。すなわち、下の図のように、全くノイズのない理想増幅器を考え、その入力部分に雑音電源が付いているとする。

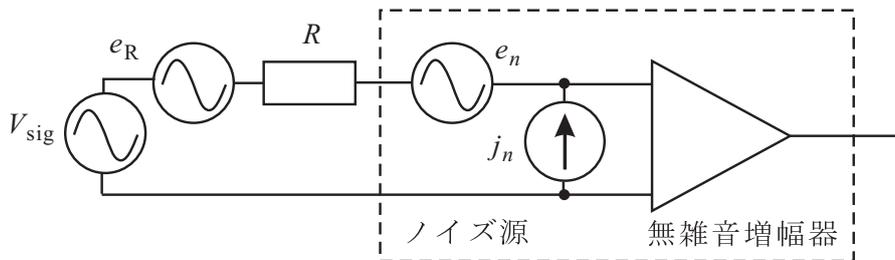


図 6.5 増幅器の雑音を考えるための等価回路。無雑音増幅器の入力部分に雑音電源が存在する。

この回路から、増幅器の電力利得を G_p と置いて、

$$\delta e_{\text{intotal}}^2 = e_{\text{out}}^2 / G_p = j_n^2 R^2 + e_n^2 + e_a^2 \quad (6.22)$$

である。

図 6.5 のような増幅器モデルにおいては、増幅器 (破線内部) を通すことで、信号対雑音比 (SN 比, signal to noise ratio) は必ず悪化する。S/N 比と書くこともあり、電圧の 2 乗、あるいは電力で見た信号と雑音の比である。この時、雑音指数 (noise figure) は

$$\text{NF} = 10 \log_{10} \frac{(S/N)_{\text{in}}}{(S/N)_{\text{out}}} = 10 \log_{10} \frac{S_{\text{in}} N_{\text{out}}}{S_{\text{out}} N_{\text{in}}} \quad (6.23)$$

と定義される。これは、(3.3) 式の、増幅度を dB で表したのと同じ表式であり、S/N 比劣化の度合いを示すものである。

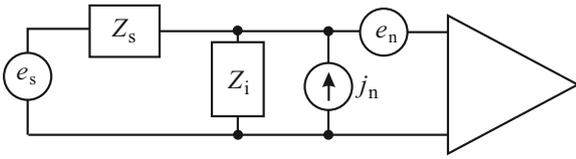
$$N_{\text{out}} = G_p \overline{e_N^2}$$

であるから、

$$\text{NF} = 10 \log_{10} \frac{S_{\text{in}} G_p \overline{e_N^2}}{S_{\text{in}} G_p \overline{e_R^2}} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_N^2}}{\overline{e_R^2}} = 10 \log_{10} \frac{\overline{e_n^2} + \overline{e_R^2} + \overline{j_n^2 R^2}}{\overline{e_R^2}} \quad (6.24)$$

となる。

6.2.2 ノイズインピーダンスマッチ



次に、左図のように増幅器の入力インピーダンス Z_i を考えて、信号源の最適インピーダンスを考える。この場合、増幅器の入力で換算した雑音温度 T_a と、これにマッチした最適信号源抵抗 R_{bs} は

$$T_a = \frac{\sqrt{e_n^2 j_n^2}}{2k_B}, \quad R_{bs} = \sqrt{\frac{e_n^2}{j_n^2}} \quad (6.25)$$

で表される。この回路全体を右から見たときの雑音温度 T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\operatorname{Re}(1/Z_i)}{\operatorname{Re}(1/Z_s)}\right) \frac{T_a}{2\operatorname{Re}Z} \left(\frac{|Z|^2}{R_{bs}} + R_{bs}\right), \quad \frac{1}{Z} \equiv \frac{1}{Z_i} + \frac{1}{Z_s} \quad (6.26)$$

となる。 Z_i を調整してこの T_n を最小にする条件は

$$Z_i = \frac{1}{R_{bs}^{-1} - Z_s^{-1}} \quad (6.27)$$

で、この時、 T_n は

$$T_n = \left(1 + \frac{\operatorname{Re}(1/Z_i)}{\operatorname{Re}(1/Z_s)}\right) T_a \quad (6.28)$$

となる。(6.27) の条件をノイズマッチングと呼ぶ。

6.3 変調とアナログ信号伝送

前章まで、電子回路とは何らかの時間に依存する電気的信号 $f(t)$ を扱うもの、として考え、その目的のために人間が電磁場というものをどのように飼いならしていくか、ということを中心として、これまで開発されてきた様々な手法について述べた。前々節でこれに雑音、というものが重畳されている、という物理的事実を述べた。すなわち、電気信号には必ず統計的なゆらぎが存在し、それは、回路的には付加的な電源として扱われる。

本節では、この電気信号というものにどのように人間が情報を載せるのか、ということを考える。「『信号』はすでに信号ではないのか?」と思われるかもしれないが、例えば正弦波の信号を送ったとして、そのままでは「信号が送られている」という情報しか伝えることができない。言わば、紙の上にインクで文字を書いていくように、この電気信号の上に情報を書き込んでいく手法について見ていこう。物理実験においては、意志を持った送り手が情報を電気信号に乗せてくる、ということはないわけであるが、それでもこの「変調法」は、信号を分離したり、雑音を抑えたり、様々な局面で有用になる。なお本節で眺めるのは、アナログ変調方式であり、現在通信において広く使われているデジタル変調方式については、デジタル回路を学んだ後に触れることにする。

6.3.1 変調と復調

もっともプリミティブな信号伝送方式として基底帯域通信 (baseband communication) がある。これは、例えば $f(t)$ で表されるような音波を信号として送りたい場合、例えば $V(t) = f(t)$ ($J(t) = f(t)$) となるような電圧 (電流) 信号として伝送路に乗せてしまう方法である。オーディオアンプから出ているスピーカーケーブルにはこのような「信号」が乗っており、スピーカーという変換器 (transducer) によって音波として復元される。ケーブル直結型のインターフォンや館内放送なども同様である。これらは、主に低周波域に大きなパワースペクトルを持っている^{*1}。

これに対して、 $f(t)$ という信号を、 $f(t)$ が含むよりも遥かに高い周波数成分から形成される搬送波 (carrier (wave)) に乗せて送る方式を搬送通信 (carrier communication) という。電磁波を使用したい場合、1つの伝送路に多数の情報路を担わせたい場合などは、現実的にはこの方法を取らざるをえない。

^{*1} 単に $V(t) = f(t)$ のように書いてしまうと、直結媒体によるデジタル伝送なども同様であるが、基底帯域信号という概念は、もちろんこれらには適用しない。

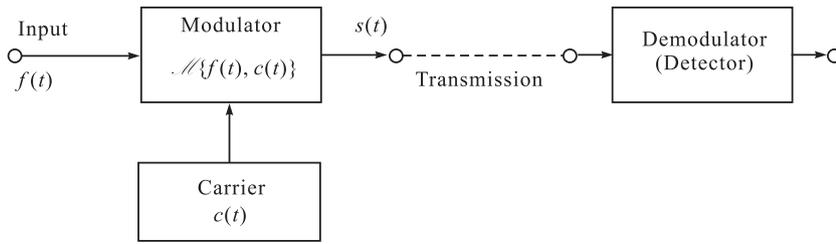


図 6.6 変調復調による搬送通信について、ブロックダイアグラムで示した。変調過程とは、入力信号 $f(t)$ と搬送波信号 $c(t)$ から汎関数出力として $\mathcal{M}\{f(t), c(t)\}$ を得る操作、と見ることができる。

時間に対して連続的で、発振も容易で解析の上でも素性の良い正弦波を搬送波（正弦搬送波，sinusoidal carrier）とする方法は、振幅変調（amplitude modulation, AM）と角度変調（angle modulation）とに大別され、後者は周波数変調（frequency modulation, FM）あるいは位相変調（phase modulation, PM）と呼ばれることもある。

一方、時間軸上で離散的に近い搬送波を用いる方法では、パルス列を使うパルス変調法があり、振幅、時間軸上の位置、幅にそれぞれ信号を載せる方法（pulse amplitude modulation, PAM; pulse position modulation, PPM; pulse width (duration) modulation, PWM (PDM)）がある。

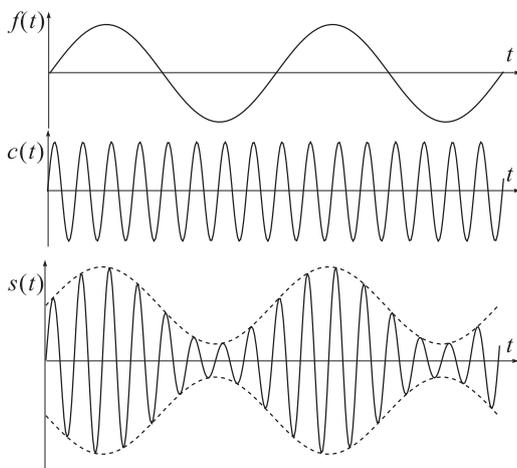


図 6.7 周波数変調の波形例

これら搬送波に載った信号を受信側で元の $f(t)$ に戻すのが復調（demodulation）あるいは検波（detection）と呼ばれる操作である。図 6.6 に一連の信号伝送過程をブロックダイアグラムとして示した。ここに示したように、変調過程とは、入力信号 $f(t)$ と搬送波信号 $c(t)$ から汎関数出力として $\mathcal{M}\{f(t), c(t)\}$ を得る操作、と見ることができる。

6.3.2 振幅変調

振幅変調は、左図のように搬送正弦波の瞬間振幅に信号を載せるもので、規格化入力信号 $f(t)$ ($|f(t)| \leq 1$)、搬送波 $c(t) = A \cos \omega_c t$ に対して出力

$$s(t) = A[1 + mf(t)] \cos \omega_c t \quad (6.29)$$

を与えるものとして定義される。変調度（modulation index） m は、通常 $0 < m \leq 1$ である。 $m > 1$ （過変調）の場合、 $1 + mf(t) < 0$ の領域が現れ、ゼロ点に関する折り返し歪が発生する。（6.29）をフーリエ変換すると、

$$\begin{aligned} S(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A[1 + mf(t)] \cos(\omega_c t) e^{i\omega t} dt \\ &= A \left\{ \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)] + \frac{m}{2}[F(i(\omega - \omega_c)) + F(i(\omega + \omega_c))] \right\} \quad (6.30) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 $F(i\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換で、 $f(t)$ を実関数と考えれば、 $F(i\omega) = F^*(-i\omega)$ である。

パワースペクトル $|F(i\omega)|^2$ は、図 6.8(a) のように、偶関数となる。これを変調信号としてキャリアに乗せると、(6.30) のように、 $\pm\omega_c$ の所にキャリアのデルタ関数スペクトルが立ち、その左右に $|F(i\omega)|^2$ で $\pm\omega$ に現れていたス

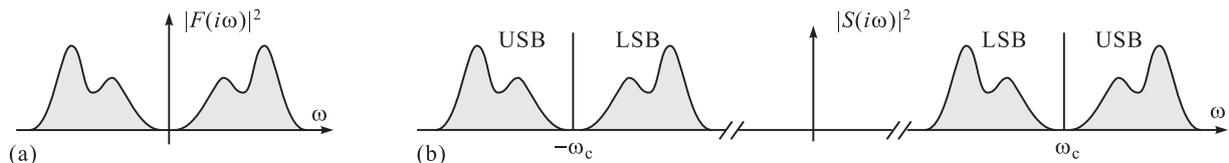


図 6.8 基本振幅変調方式 (6.30) の周波数パワースペクトル。(a) 入力信号 $f(t)$ のフーリエ変換パワースペクトル $|F(i\omega)|^2$ の例を模式的に描いたもの。(b) (a) の $F(i\omega)$ に対する変調信号 $s(t)$ のフーリエ変換パワースペクトル $|S(i\omega)|^2$ 。LSB と USB の中央 $\pm\omega_c$ の所にデルタ関数スペクトルが立っている。

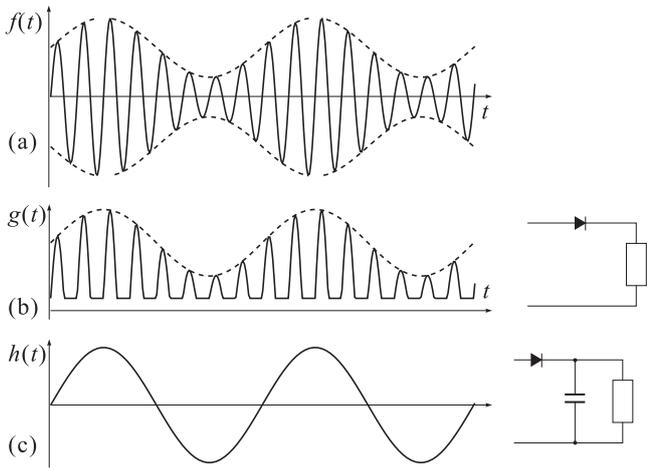


図 6.9 基本振幅変調信号の復調信号例模式図. 実際に通信で使用されているものは, 少なくとも搬送波の ω_c は信号の周波数の 1000 倍程度でずっと細かいものである. (a) 入力信号. (b) 右の簡単なダイオード回路で半波整流が行われた信号. (c) 高周波成分がキャパシタによりカットされ, 元の信号が復元される. (包絡線検波方式).

ベクトルがそのまま移動した形となる. このように, 入力時点では $\omega = 0$ での折り返しによる見かけ上のものだった負の周波数のスペクトルが, 変調信号では ω_c からの上下へのずれとして意味を持つようになる. この ω_c より高周波側の信号帯を上側波帯 (upper sideband, USB), 低周波側の信号帯を下側波帯 (lower sideband, LSB) と呼ぶ.

図 6.9 に, 振幅変調された信号を受信側で復調する手続きと回路例を示した. 図のように, 送信側に比べて極めて簡単な回路によって復調が実現される. 電子回路の入門としていわゆる「鉱石ラジオ」というのが良くトライされる所以である.

変調信号 (6.30) をそのまま送信する場合, 送信信号には情報が事実上含まれていない搬送波 ω_c 成分と, LSB, USB という全く同じ情報を含む成分とが混在している. 電磁波などによる伝送の場合, 帯域幅を必要量の二倍以上使用し, 送信電力も非常に余計に使っていることになる. そこで, 周波数フィルターを用いて残存搬送波と USB あるいは LSB の片方を取り除いて一方の側波帯のみによる通信, 単側波帯 (single side-band, SSB) 通信方式も良く使用される. この SSB では, 音声信号のように超低周波域に信号がない場合は良いが, データ通信などで直流成分なども信号に含まれている場合, 側波帯がキャリアとオーバーラップしてしまい, フィルターでのカットが困難となる. このような場合は, 対称側波帯の内一部を残す残留側波帯 (vestigial sideband, VSB) 方式が取られる.

6.3.3 角度変調

振幅変調方式では, 入力信号帯域が (搬送波の上下で 2 倍となる以外は) そのまま平行移動する形であり, 入力信号に対する線形操作はそのまま変調信号に反映される, 線形変換である. これに対して, 角度変調は非線形変換であり, 伝送帯域は原信号の 2 倍以上になるが, 一方, 信号対雑音比の上では後で見ると利点があり, 多く使用される変調方式である.

角度変調信号を次のように表す.

$$s(t) = A \cos \theta_i(t), \quad \theta_i(t) = \omega_c t + \phi[t, f(t)]. \quad (6.31)$$

微分角振動数 ω_i は次のようになる.

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt} = \omega_c + \frac{d\phi[t, f(t)]}{dt}. \quad (6.32)$$

入力信号 $f(t)$ に $d\phi/dt$ を比例させる変調を周波数変調, ϕ を比例させる変調を位相変調と呼ぶ.

$$\frac{d\phi[t, f(t)]}{dt} = k_f f(t) \quad (\text{FM}), \quad \phi[t, f(t)] = k_p f(t) \quad (\text{PM}). \quad (6.33)$$

従って,

$$s_{\text{FM}}(t) = A \cos \left[\omega_c t + k_f \int^t f(\tau) d\tau \right], \quad (6.34)$$

$$s_{\text{PM}}(t) = A \cos[\omega_c t + k_p f(t)] \quad (6.35)$$

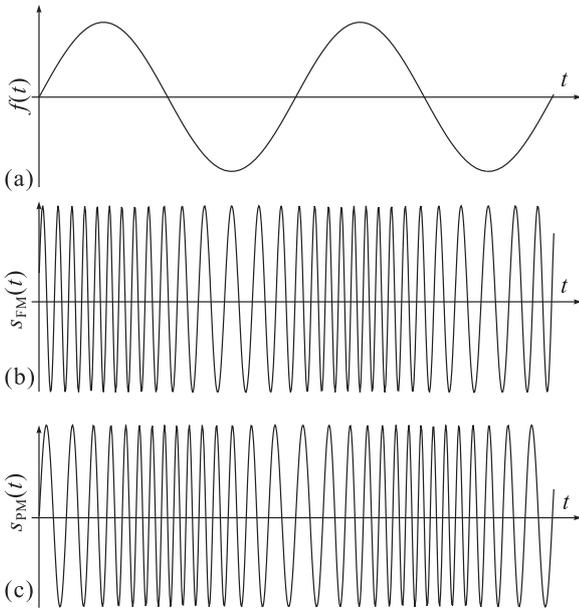


図 6.10 角度変調信号の模式図. (a) 信号. 正弦波とした. (b) 周波数変調信号. (c) 位相変調信号.

である. したがい, 振動数シフト, 位相シフトの最大値は, それぞれ

$$\Delta\omega = k_f |f(t)|_{\max} \equiv k_f f_{\max}, \quad \Delta\phi = k_f \left| \int^t f(\tau) d\tau \right|_{\max} \quad \text{for FM}, \quad (6.36)$$

$$\Delta\omega = k_p |f'(t)|_{\max}, \quad \Delta\phi = k_p |f(t)|_{\max} \quad \text{for PM} \quad (6.37)$$

となる.

周波数変調, 位相変調は以上のように異なっているように見えるが, 実際の信号の上では振動数 ω の成分で見ると位相が $\pi/2$ だけ異なるだけで, 図 6.10 のようになって信号の外形から本質的な違いを見出すのは困難である. また, 変調後の周波数スペクトルも一般信号については明確なことは言い難い. 信号波形が単純な正弦 (余弦) 波

$$f(t) = A_p \cos \omega_p t$$

であるとすると, $\phi_{\text{FM}} = (k_f A_p / \omega_p) \sin \omega_p t$ であるから,

$$s_{\text{FM}} = A \cos(\omega_c t + \beta \sin \omega_p t) = A \operatorname{Re} [\exp(i\omega_c t) \exp(i\beta \sin \omega_p t)] \quad \left(\beta \equiv \frac{k_f A_p}{\omega_p} = \frac{\Delta f}{f_p} \right).$$

$\sin \omega_p t$ が $T = 2\pi/\omega_p$ の周期関数であることから, $\exp(i\beta \sin \omega_p t)$ はフーリエ級数に展開でき,

$$\exp(i\beta \sin \omega_p t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega_p t), \quad (6.38a)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(i\beta \sin \omega_p t) \exp(-in\omega_p t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[i(\beta \sin \theta - n\theta)] d\theta = J_n(\beta) \quad (6.38b)$$

である. ここで, $J_n(x)$ は n 次の第 1 種ベッセル関数である. すなわち,

$$s_{\text{FM}}(t) = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_p)t] \quad (6.39)$$

より, 周波数スペクトルは

$$S_{\text{FM}}(i\omega) = \pi A \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \{ \delta[\omega - (\omega_c + n\omega_p)] + \delta[\omega + (\omega_c + n\omega_p)] \} \quad (6.40)$$

となる.

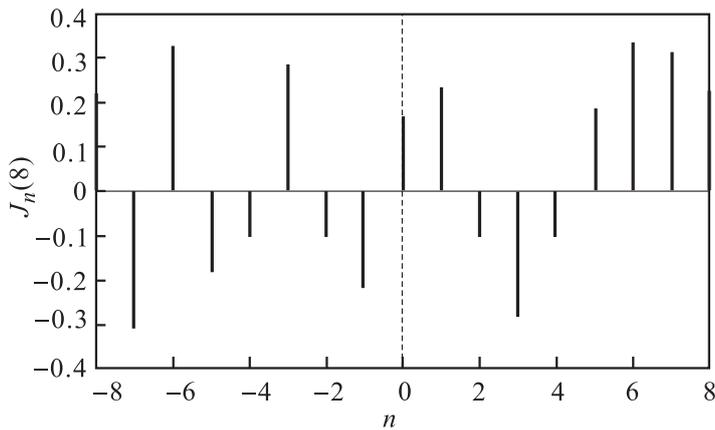


図 6.11 第一種ベッセル関数 $J_n(x)$ を、 $x = 8$ の場合に、 n に対してプロットしたもの。横軸は、周波数変調の場合の $(\omega - \omega_c)/\omega_p$ と見ることができ、棒の高さがその位置に立つデルタ関数スペクトルの係数を表している。

すなわち、デルタ関数スペクトルが ω_c の周りに等間隔に無限に並んだ形になる (図 6.11)。図では、デルタ関数の係数の符号と大きさを矢印で示している。これは、ベッセル関数の性質 $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ などを当然反映したものである。実用上は、この無限に広がる信号帯域を使用する必要はなく、(6.36) の $\Delta\phi$ に応じて適当な帯域を用意すれば良い。これは、確固とした基準があるわけではなく、以下のように見積もられる。 $\omega_c - k_f f_{\max} \leq \omega_i(t) \leq \omega_c + k_f f_{\max}$ とする。この $\omega_i = d\theta_i/dt$ (瞬時角振動数, instantaneous angular frequency と呼ばれる) の変動幅 $2k_f f_{\max}$ を ω_f とする。入力信号 $f(t)$ の方の帯域を ω_w とすると、標本化定理 (後述, ??節) により、 $f(t)$ は時間幅 π/ω_w の階段的な関数と信号論的に等価であり、それぞれの階段を構成する信号帯域は $\pm 2\omega_w$ より $4\omega_w$ である。結局、変調信号の周波数スペクトルは $\omega_c - k_f f_{\max} - 2\omega_w$ から $\omega_c + k_f f_{\max} + 2\omega_w$ に存在する。以上の考察からは必要帯域として、

$$\omega_{bw1} = 2(k_f f_{\max} + 2\omega_w) = 2(\omega_f + 2\omega_w) \quad (6.41)$$

と見積もられる。一方、仮に全電磁波帯域を使用して送信したとして周波数に対する電力分布を求め、使用周波数帯域が全電力の 98% をカバーするように帯域を決めると、

$$\omega_{bw2} = 2(\omega_f + \omega_w) \quad (6.42)$$

となる。実際には、帯域に応じて、(6.41) と (6.42) の間を適当に取る ($\omega_{bw} = 2(\omega_f + \xi\omega_w)$ として、 ξ を $1 \leq \xi \leq 2$ に取る) ことが行われている。

6.3.4 周波数変調信号の復調

FM 信号の復調を行う回路には AM に比べると多くの種類がある*2。中でも最も簡単なものが図 6.12 に示す 2 共鳴回路検波方式である。

これは、LC 共鳴回路の共鳴周波数からシフトした領域で、定電圧振幅バイアスをする、流れる交流電流振幅が周波数に対して線形に変化する領域があることを用いている。すなわち、FM 信号が負荷に対しては AM 信号に変化するのでここに AM 信号を復調するためのダイオードを挿入する。2つの共鳴回路を用いるのは、図 6.12(b) に示したように、2つの共鳴回路の共鳴周波数をずらして、AM 検波出力の符号を反転させることで、線形領域を広く取り、帯域を稼ぐためである。トランス (相互インダクタンス) 結合を用いているのは、もちろん、これらの共鳴回路に信号を分配して定電圧振幅駆動をし、また、差動出力として出力信号の結合 (加算) を容易にするためである。

6.3.5 変調と雑音

次に、この代表的な 2 つの変調方式について、雑音特性を調べよう。ここで直接考慮するのは、伝送路を伝播中に何らかの外来雑音が混入する場合であり、これも図 6.13 のように伝送路と受信段の間で雑音が信号に加算される (搬

*2 AM 系でも SSB 信号の復調には、一旦キャリアが入った基本変調信号へ戻して復調するプロダクト検波が必要になり、多くの種類が使用される。

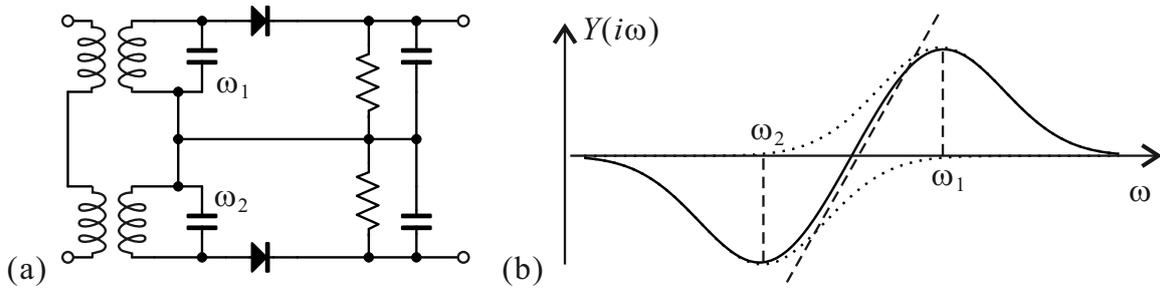


図 6.12 (a) FM 信号の 2 共鳴回路式復調回路. 共鳴周波数をずらした 2 つの共鳴回路の検波出力を符号を反転させて合成する. (b) 合成共鳴回路のアドミタンスの ω 依存性. 中央付近の直線的に変化する付近を使用する.

送波に乗算される), という形で回路に取り込むことにする.

単純振幅変調の場合, 混入雑音信号を $n_i(t)$ と書き, 送信出力 (6.29) に対して受信信号が $r(t)$, それを復調した信号が $g(t)$ になるとして,

$$r(t) = A_r[1 + mf(t)] \cos \omega_c t + n_i(t) \quad (6.43)$$

$$g(t) = A_r mf(t) + n_o(t) \quad (6.44)$$

とする. $n_o(t)$ が出力雑音を表している. もちろん, 実際の回路では入力から出力へはその途中で増幅や帯域フィルタにより信号帯域のみを拾い出す過程が入っている. 増幅に関しては, 既に見たように, NF を改善することはなく, 変調に対する雑音の影響を考慮する上では考える必要がない. 帯域フィルタについては, 信号, 雑音共に信号の帯域成分のみを考えることで事実上考慮されている. n_i を搬送波と同相成分と直交成分とに分けて $n_i(t) \cos \omega_c t + n_r(t) \sin \omega_c t$ と書くと, 何らかの方法で搬送波の同期信号が得られれば同期検波*3により直交成分 $n_r(t)$ は復調信号から落とすことができる. これによって, $n_o(t) = n_i(t)$ となる. (時間) 平均入力信号パワー S_{pr} および, 平均出力信号パワー S_{po} は,

$$S_{pr} = \frac{A_r^2}{2} + \frac{(A_r m)^2}{2} \langle f^2 \rangle, \quad S_{po} = A_r^2 m^2 \langle f^2 \rangle \quad (6.45)$$

である.

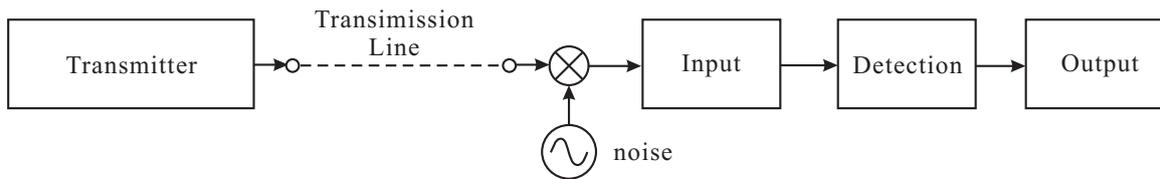


図 6.13 外来ノイズを送信受信ラインに取り込む.

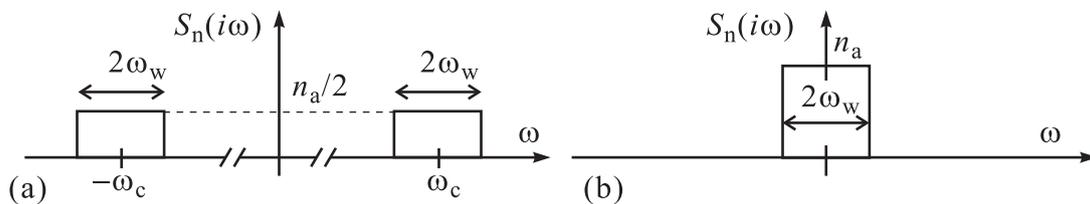


図 6.14 AM 変調信号に対する雑音を模式的に描いた. 白色雑音を仮定し, 信号帯域での電力分布を示した. (a) 入力段での雑音電力. (b) 復調後の雑音電力.

*3 同期信号との乗算回路により, 同相信号だけ取り出す検波方式. ロックイン増幅器の位相敏感検波 (phase sensitive detection, PSD) などが代表例.

雑音は、考えている帯域内で図 6.14 のように白色で角周波数あたりのパワースペクトルを n_a とする。入力段、出力での雑音パワーは

$$2 \times \frac{n_a}{2 \times 2\pi} \times 2\omega_w = \frac{n_a \omega_w}{\pi}, \quad \frac{n_a \times 2\omega_w}{2\pi} = \frac{n_a \omega_w}{\pi} \quad (6.46)$$

となるので、入力、出力の S/N 比は

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{in}} = \frac{\pi[A_r^2 + (A_r m)^2 \langle f^2 \rangle]}{2n_a \omega_w}, \quad (6.47)$$

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{\text{out}} = \frac{\pi A_r^2 m^2 \langle f^2 \rangle}{n_a \omega_w} = 2\eta \left. \frac{S}{N} \right|_{\text{in}} \quad (6.48)$$

と表される。ここで、

$$\eta = \frac{m^2 \langle f^2 \rangle}{1 + m^2 \langle f^2 \rangle} \quad (6.49)$$

は、電力伝送効率と呼ばれ、 $0 < m \leq 1$ であるから一般に $\eta < 1/2$ であり、入力 f が正弦波の場合は $\langle f^2 \rangle = 1/2$ より $\eta < 1/3$ である。

次に、角度変調の場合を考えよう。AM の場合と同様、同相ノイズを n_l 、直交ノイズを n_r とする。受信信号 $r(t)$ を、

$$\begin{aligned} r(t) &= A_r \cos[\omega_c t + \phi(t)] + n_l(t) \cos \omega_c t - n_r(t) \sin \omega_c t = A_r \cos[\omega_c t + \phi(t)] + A_n(t) \cos[\omega_c t + \phi_n(t)] \\ &= V_r(t) \cos[\omega_c t + \theta(t)] \quad (\theta(t) = \phi(t) + \phi_{\text{no}}(t)) \end{aligned} \quad (6.50)$$

と書く。 $A_n(t)$ は雑音の包絡線振幅、 ϕ_n は雑音位相、 $\phi_{\text{no}}(t)$ は入力の位相雑音である。また、

$$V_r(t) = \sqrt{A_r^2 + A_n^2(t) + 2A_r A_n(t) \cos[\phi_n(t) - \phi(t)]}, \quad (6.51a)$$

$$\phi_{\text{no}} = \arctan \frac{A_n(t) \sin[\phi_n(t) - \phi(t)]}{A_r + A_n(t) \cos[\phi_n(t) - \phi(t)]} \quad (6.51b)$$

である。

角度変調信号の復調に関しては回路がやや複雑になるため触れなかったが、理想復調器では復調信号は包絡線振幅 A_e の雑音 (時間変動成分) には依存せず、位相成分のみ抽出できるとする。信号振幅が雑音振幅に比べて十分大きい ($A_r \gg A_n(t)$) と仮定すると、位相雑音は次のように近似される。

$$\phi_{\text{no}} \cong \arctan \left[\frac{A_n(t)}{A_r} \sin[\phi_n(t) - \phi(t)] \right] \cong \frac{A_n(t)}{A_r} \sin[\phi_n(t) - \phi(t)]. \quad (6.52)$$

入力段での時間平均信号電力は明らかに $A_r^2/2$ である。一方、平均入力雑音電力 N_i は、パワースペクトル $n_a/2$ の白色雑音を仮定して、信号の全帯域幅を ω_B とすると、AM の場合と同じく $n_a \omega_B/2\pi$ である。従って、入力段 S/N 比は次のようになる。

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{\pi A_r^2}{n_a \omega_B}. \quad (6.53)$$

復調後の S/N 比は PM と FM とで異なる。PM の復調出力 $\theta(t)$ の内、信号成分は $k_p f(t)$ 、平均信号電力は $k_p^2 \langle f^2 \rangle$ である。平均雑音電力は

$$N_{\text{oPM}} \cong \frac{1}{A_r^2} \langle A_n(t)^2 \sin^2[\phi_n(t) - \phi(t)] \rangle$$

であるが、 $\phi_n(t)$ は $[0, 2\pi]$ に一様に分布していて復調フィルタにより消去されることが知られている。これを加味すると、

$$N_{\text{oPM}} \cong \frac{1}{A_r^2} \langle A_n(t)^2 \sin^2 \phi(t) \rangle = \frac{n_a \omega_w}{\pi A_r^2} \quad (6.54)$$

となる。今、 $f(t)$ が正弦波 $A_p \cos \omega_p t$ であるとする $\beta \equiv k_p A_p$ として信号電力は $\beta^2/2$ となり、 $\omega_B = 2(\beta + \xi)\omega_w$ ($1 \leq \xi \leq 2$) と表せるので、S/N 比は

$$\frac{S_o}{N_o} = \frac{\beta^2}{2} \frac{\pi A_r^2}{n_a \omega_w} = \frac{\beta^2}{2} \frac{\omega_B}{\omega_w} \frac{\pi A_r^2}{n_a \omega_B} = \beta^2 (\beta + \xi) \frac{S_i}{N_i} \quad (6.55)$$

と求められる。

FM の場合は、復調信号出力は $d\theta/dt$ である。信号成分、平均電力はそれぞれ $k_f f(t)$, $k_f^2 \langle f^2 \rangle$ となる。雑音成分は dn_{no}/dt で、 ϕ_n については先に述べたのと同じ理由で落ちるため、平均雑音電力は次のようになる。

$$N_{oFM} = \left\langle \frac{dn_{no}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{A_r^2} \left\langle \frac{dn_l}{dt} \right\rangle = \frac{1}{A_r^2} \int_{-\omega_w}^{\omega_w} n_a \omega^2 \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{n_a \omega_w^3}{3\pi A_r^2} \quad (6.56)$$

復調後の S/N 比は、PM の時と同様、 $\beta \equiv k_f A_p / \omega_w$ と置いて

$$\frac{S_o}{N_o} = 3\beta^2(\beta + \xi) \frac{S_i}{N_i} \quad (6.57)$$

と得られる。これより、S/N 比の関係は次のようになる。

$$\frac{S_o}{N_o} \Big|_{FM} = 3\beta^2 \frac{S_o}{N_o} \Big|_{AM}, \quad \frac{S_o}{N_o} \Big|_{PM} = \beta^2 \frac{S_o}{N_o} \Big|_{AM} \quad (6.58)$$

これより、ある程度変調を深くして、 $\beta \geq 1/\sqrt{3}$ となれば S/N の面では FM が AM に対して優れ、 $\beta \geq 1$ となれば PM も AM に対して優れていることがわかる。

付録 I：実験室のノイズ対策

雑音対策には、(1) 内部雑音を小さくする、(2) 雑音源をなくす、(3) 外部からの雑音を拾わないようにする、あるいは内部での不要な結合による雑音の混入を防ぐ、の 3 種類がある。また、測定系全体を考えれば同じ事であるが、(4) 外部へ雑音を出さないようにする、という対策も重要である。

このうち、(1) については本文で見ってきたので、ここでは、(2) 以降について考える。

I.1 雑音源対策

(2) の雑音源をなくすことは、もちろん、最も有効な対策である。例として、大きな電流のスイッチングノイズについて考える。しばしば非常に大きくしかも不定期に雑音が発生するものに、電力制御のサイリスタがある。これは、図 I.1 のように、入力交流を「ちょん切る」事によってヒーターなどの消費電力を制御するものである。カットする位置が電圧の高い所や変化の大きな所であると、ヒーターには一種の鋭い波形のパルス列がかかることになり、電流の大きさを考えても非常に高強度の高周波雑音が発生する。

この場合、ヒーター制御を止めてしまうか直流電源制御に代えれば雑音の問題はなくなる。次善の策として、サイリスタでカットする位置を電圧零に限る、という手がある。

I.2 アース (接地) とシールド

アースはノイズ対策というよりは、電子回路全体の基本である。アースには様々なレベルの問題がある。第一に、測定系 (実験室) 全体のアースをどうとるのが問題である。単純には無限大キャパシタンスに抵抗零で接続されていれば良いが、実際には地球 (地面) と接触する、というのが一般的である。

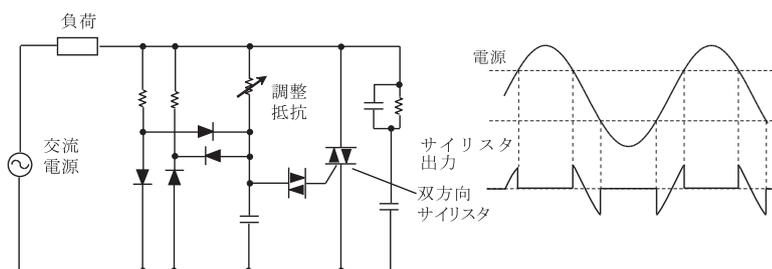


図 I.1 交流電源からサイリスタを用いて電力制御する回路例と正弦波を「ちょん切る」ことで生じるパルス列の模式図。

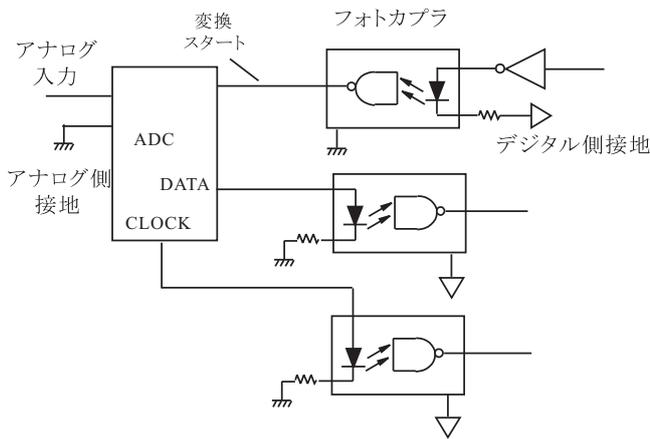


図 I.2 フォト・カプラを用いたデジタル回路とアナログ回路の分離法模式図。

アースの評価は、最も単純には接地抵抗で行われる。鉄筋・鉄骨の建物は一般に骨組み部分は設置されているので、単純には窓枠や水道栓などに接触するのが最も簡単な接地法である。これで不満足であれば、専用のアースを準備することになる。アースの取り方も、単純に金属の杭を打ち込む方法から、沢山の導線を土に絡ませ、ゲル化物質を注入して接触抵抗を下げる方法など様々である。接触抵抗の測定には3点法などがよく使われる。

ただし、アースを取るためにケーブルを長々と引き回すと却ってノイズを拾う可能性がある。接地抵抗、および地面そのものも周波数特性を持っているので、動作周波数によってアースの取り方（場合によってはとらない事）にも注意が必要である。

回路のアースの取り方にも色々注意点がある。通常は、回路のシールドのためにも、また安全のためにも回路を包む筐体をアース電位とするのが普通である。対象とする周波数帯でアースの取り方も異なるので、絶対的な法則はないが、幾つかの原則を並べると、

1. デジタルとアナログのアースは分離すること。
2. 電流の流れるアースとそうでないものを区別すること。
3. グランドループを作らないようにすること。
4. 上記2項とも関係するが、1点でアースを取るようにすること。
5. 上記と矛盾する場合もあるが、最短距離で取ること。

などがある。

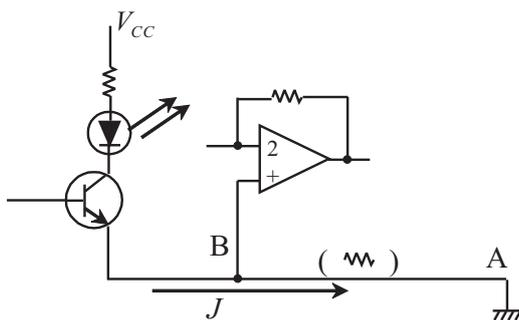


図 I.3 LED を光らせるために大きな電流を流すグラウンドを精密測定回路のグラウンドと共通にすると、わずかに存在する接地線の抵抗によって後者のグラウンドが不正確となる。

まず、デジタル・アナログのアース分離は、計測回路では特に重要である。デジタル信号は一般に矩形波であり、多くの高周波成分を含んでいる。電源ライン、従ってアースラインに流れる電流も矩形波的となりアナログのアースラインと直結されると、極めて大きなノイズが微小信号系に混入してしまう。希であるが逆の場合もあり、大電流パルスなどを扱うアナログ回路のアースとデジタル系を直結すると、パルスによって誤動作や回路の破壊を招くことがある。

アナログ・デジタルのアースライン分離法は様々である。図 I.2 はデジタル電圧計などに良く使われる方法で、比較的ノイズの少ない周波数の低い回路とノイズの多い回路を、フォトカプラで分離するもので、アナログ・デジタルの分離ではなく、デジタル・デジタルの分離である。このような光による分離は物理的に明確で、様々に応用される。アナログ・デジタルを分離する方法として、

$V - f$ (電圧-周波数) 変換を行って光強度変調信号とし、デジタル側で周波数カウントを行うものがある。信号を電気から直流的な光強度そのものに変換して伝達する方法は、アナログ-デジタルインターフェースに限らずア

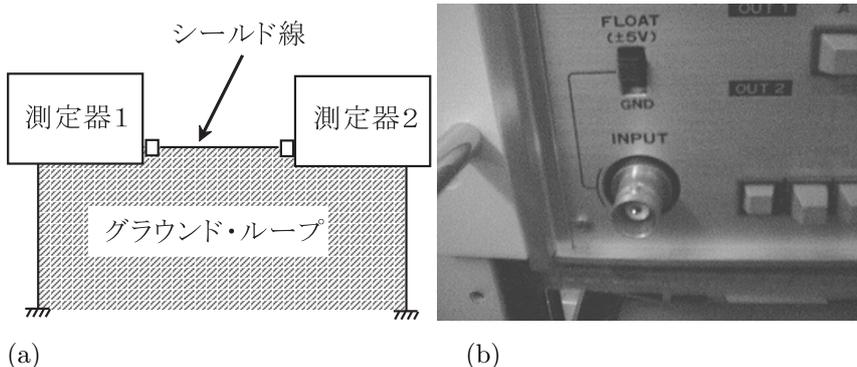


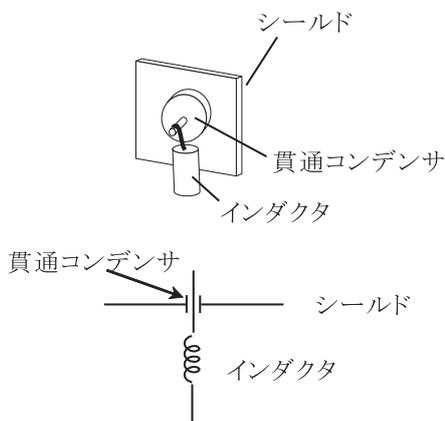
図 I.4 (a) グラウンドループの模式図. (b) ロックインアンプ入力に設けられた ground-float 切り替えスイッチ.

ナログアナログ間で例えば取り扱う電圧レベルが大きく異なる場合などに使用され、アイソレーションアンプと呼ばれるものの一種である。アイソレーションアンプには、この他、差動アンプを用いるもの、トランスを用いるものなど、多くの種類がある。

次の、電流が流れるアースとそうでないアースの区別は、図 I.3 を見れば明らかであろう。A 点が実際の接地電位であったとすると、流している電流が小さい間は B 点もほぼ接地電位であるが、電流が大きくなるにつれて外れ、ノイズが混入するばかりでなく、回路動作が異常になる場合もある。これを避けるためにも、1 点接地を行い、特に電流の大きなラインは筐体を使わず、直接電源部の出力に接続すべきである。

グラウンドループとは、図 I.4 のように、アース線がループを形成してしまう事を言う。このようなループはできるだけ作らないか、できてしまった場合には、ループの面積を最小にする工夫が必要である。理由は明らかで、このループ内に磁気雑音が侵入した場合、アースラインに誘導電圧雑音が発生する。

同軸ケーブルは外部雑音遮蔽効果が大きい、不用意につなぐと時として大きな雑音を拾う事がある。このため、直流から低周波を扱う機器では入力の BNC コネクタのシールドラインに接地フロートスイッチを設けているものが多い(左図)。「フロート」の位置ではシールドラインは適当な(数十Ω程度)抵抗を介して接地される。このスイッチを切り替えてフロートの場合に雑音が減るようだとグラウンドループができていいる可能性が高い。



アースを最短距離で取る事は、特に高周波回路で重要である。それも、広い面積のアース(グラウンドプレーン)に落とす事が必要である。これは、高周波では表皮効果によって導線の有効断面積が小さくなるためである。これを行うと、グラウンドループが発生する場合がある。このような場合も、ループの有効面積を極力小さくする工夫が有効である。シールド(遮蔽)には、静電遮蔽と磁気遮蔽とがある。静電遮蔽は、十分厚い導体で囲まれた内部には、外部の静電的な電場変化の影響が伝わらないことを使うものだが、周波数の高い電磁波に対しても、反磁性電流の発生によって非常に有効に作用する。回路を包む筐体はもちろん、回路同士をつなぐケーブルやコネクタ類も十分厚い金属で覆われていることが望ましい。ただし、これらのシールドは、必ずアースなどにターミネートされていることが必要で、電位がきちんと決まっていないと逆に

雑音発生源となることもある。この際もグラウンドループは極力作らないように注意する。実験室全体を静電遮蔽するシールドルーム(電波暗室)なども有効である。ただし、少しでもドアを開けていると効果は激減する。

静電遮蔽に発生する渦電流の減衰時間よりもゆっくりした磁気雑音の遮蔽は、通常の導体による遮蔽では難しく、透磁率の大きな磁性体や超伝導体を用いた磁気遮蔽が必要となる。磁性体を使う場合、外部の磁場の揺らぎに応答して磁化が変化しなければならぬので、良く焼きなました、磁区変化のスムーズなものである必要がある。

シールドケーブルにも、多数のケーブルにシールドの網線をかぶせた多芯シールドケーブルや、高周波回路で紹介した同軸ケーブルなど様々な種類がある。雑音や磁気的な結合を避けるために、芯線を2本づつより合わせたツイストペアケーブルと呼ばれるものもある。ただしもちろん、一対の信号線がうまくこのツイストペアに一致するように

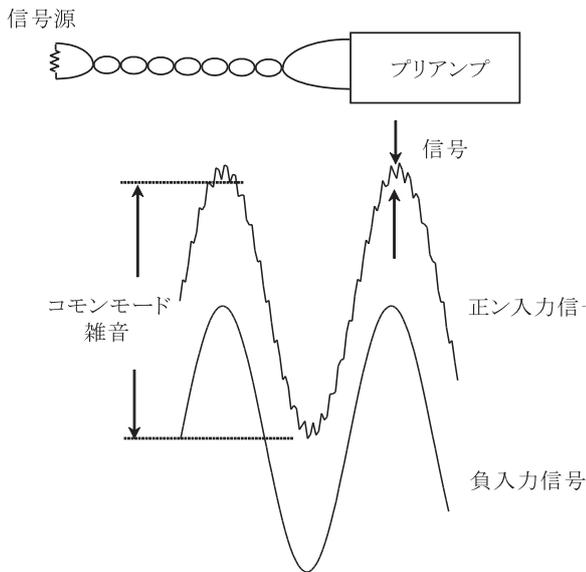


図 I.5 コモンモードノイズの模式図.

しないと雑音低減効果はない。また、単芯のシールドケーブルを束ねて更にシールドをかぶせた2重シールドケーブルも使用される。これは、特にケーブルが動く際に絶縁体に発生する摩擦電気による雑音を低減するのに効果がある。シールドケース内に外部からケーブルを引き込む際には、ケーブルをアンテナとする高周波雑音の混入に注意する。このためには、例えば、左図のような貫通コンデンサを用いたローパスフィルタなどが有効である。

1.3 デジタル雑音を防ぐ

再三述べたように、デジタル回路は高周波の雑音源なので、その遮断は重要である。既に述べたように、アースラインを分離する事、同様に電源ラインを分離する必要がある。高周波である事から空間にも放射される。これは、最初に挙げた中でも(4)の雑音放射防止対策が必要となる。この場合も遮蔽は有効である。また、プリント基板のパターニングなども、最短距離でできるだけ鋭角配線を作らないようにすると放射密度が減少する。遮蔽が難しく、放射雑音が大きいののがLEDをダイナミックドライブした表示器である。これは、切り替え時に変化する電流が大きいことと、表示部分の遮蔽が困難であるため大きな雑音を放射していることが多い。良く使われている簡単なパネルメーターなどの設計にはほとんど雑音に注意を払っていない。これらは、極力液晶などの電流の小さなものに換え、ダイナミックドライブも避けるべきである。

計測に良く使用される GPIB(「コンピュータの利用」の項参照)も、電流の規格が大きくノイズを発生しやすい。また、パーソナルコンピュータ(PC)のバスは非常に多くの高周波雑音を含んでいるので、PCとの直結は低雑音回路では絶対に避けるべきである。光インターフェースが市販されているのでこれを利用するのが簡便である。

1.4 コモンモードノイズを防ぐ

信号ラインにはしばしば大きなコモンモードノイズが発生することがある。これは、図 I.5 のように信号の正負両方のラインに同じノイズ電圧が乗ることを意味する。入力インピーダンスが大きい回路で、入力ラインが長く伸びている場合、信号より桁違いに大きなコモンモードノイズが乗る場合もある。このような場合に有効なのが、差動増幅である。このためにはベースラインをアースで代用せず、正負両信号線を引く。性能の良い差動増幅器の場合、周波数にもよるが80~100dB程度のCMRRが期待できるので、信号の100倍程度のコモンモードノイズが発生していても信号を分離できる可能性がある。インピーダンスによっては、入力トランスを使うのも同等な効果がある。なお、次のEMCで「コモンモード雑音」と呼ぶものは、グラウンドレベルを一方の電極としてラインに乗じてくるもので、意味合いが異なっている。が、結果として、そのような雑音がここで言うコモンモードノイズを生じることになる。

付録 J : EMC

この 20 年位の間電子回路の世界では、ElectroMagnetic Compatibility (EMC, 電磁両立性) ということが大変に問題になるようになってきている。一口に言うと、各有目的電子回路がその動作を相互干渉しないようにしよう、という提案 (These) である。これまで集中定数回路については、局所電磁場を扱う素子とその間を電位関係を定め電荷移動を担う導線とによる構成系と考え、その近似が破たんする高周波領域では分布定数回路を導入することで回路という概念を拡大してきた。これは、高周波を伝送して各孤立電磁場間を高周波的にも結合しようとするこの見方に立てば、それぞれの個別回路も真空という伝送線路によって結合されており、扱う周波数によっては各回路孤立電磁場の近似が成立しなくなる。PC の発達に伴う CPU やバスの高周波化、携帯電話普及等により実際に電波機器や精密機器などの相互障害が大きな問題となり電磁干渉 (electromagnetic interference, EMI) が問題となって EMC が回路の物理的設計 (実装) 上、法的な規制対象となっている。

EMC は以上からもわかるように、(1) 他の回路 (ローカル電磁場) に対して干渉電磁場を発生しない (EMI を出さない) こと、(2) 他の回路からの干渉電波が来ても正常動作を保つ (electromagnetic susceptibility, EMS) (耐障害性) とを 2 方向の「性能」と位置づけるものである。EMC 指令^{*4} では、これらを指標付けして基準を作り、法令によってこれらを満たすことが義務付けられている。

電磁波も、これらの対策という観点では、(有効的) 導体伝送線路を通して伝播するものと、真空 (空気) を誘電体導波路として伝播するものとは現実に大きく異なるため、区別して考えられている。EMI では伝導妨害 (導体系) と放射妨害、EMS では伝導イミュニティと放射イミュニティ、という具合である。更に、これら妨害電磁波の伝播「モード」として、地表面 (グラウンド) を導体対の一方として伝播するコモンモードと、そうでないノーマルモードに分けて考える^{*5}。分類としては以上であり、以上の 8 つについてそれぞれ低妨害、高耐性を考えることになるが、詳細に入りすぎるので、以上の概念の説明に止める。

^{*4} Directive 2004 / 108 / EC of the European Parliament and of the Council of 15 December 2004 on the approximation of the laws of the Member States relating to electromagnetic compatibility and repealing Directive 89 / 336 / EEC

^{*5} 従って、EMC の意味で「コモンモード雑音」という時、付録 G で出てきた「コモンモードノイズ」とは意味合いが異なっている。

物理屋のための電子回路論 第12回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2016年12月21日

6.4 離散化信号

物理実験においては、時間依存する信号波形をそのままデータとして収集することもしばしば行われる。この場合、離散化された時刻においてデータが収集 (標本化, sampling) され、時系列離散数列となる。アナログデータをデジタル化する具体的方法、またデジタル化された信号の処理方法については次章でデジタル回路を学んだ後に考えよう。この節では、離散化による影響を考え、信号離散化を用いて行うパルス変調の紹介をする。またデジタル信号処理の入り口として、離散フーリエ変換、ラプラス変換 (z 変換) を導入しておく。

6.4.1 標本化定理

時間 t に対する連続量 $x(t)$ を考え、これを時間間隔 τ で標本化するとする。この離散化された「標本」を $\tilde{x}(t)$ と書くと、間隔 τ のインパルス (デルタ関数) 列を $\delta_\tau(t)$ と書いて

$$\tilde{x}(t) = x(t)\delta_\tau(t) \quad (6.59)$$

と表される。 $\delta_\tau(t)$ は、周期 τ の周期関数であることから、区間 $[-\pi/\tau, \pi/\tau]$ のフーリエ級数展開ができる。

$$\delta_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-in\frac{2\pi}{\tau}t\right). \quad (6.60)$$

したがって、そのフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta_\tau(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in(2\pi/\tau)t} \right] e^{i\omega t} dt = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right)t\right] dt \\ &= \frac{2\pi}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right) = \frac{2\pi}{\tau} \delta_{2\pi/\tau}(\omega) \end{aligned} \quad (6.61)$$

となって、 ω 空間でもデルタ関数列になる。 $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$, $\mathcal{F}\{\tilde{x}_\tau(t)\} = \tilde{X}_\tau(\omega)$ とすると、合成 (畳み込み) を $*$ で表して

$$\begin{aligned} \tilde{X}_\tau(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{\tau} \delta_{2\pi/\tau}(\omega) = \frac{1}{\tau} X(\omega) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega') \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau} - \omega'\right) \right\} d\omega' = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - n\frac{2\pi}{\tau}\right) \end{aligned} \quad (6.62)$$

が得られる。

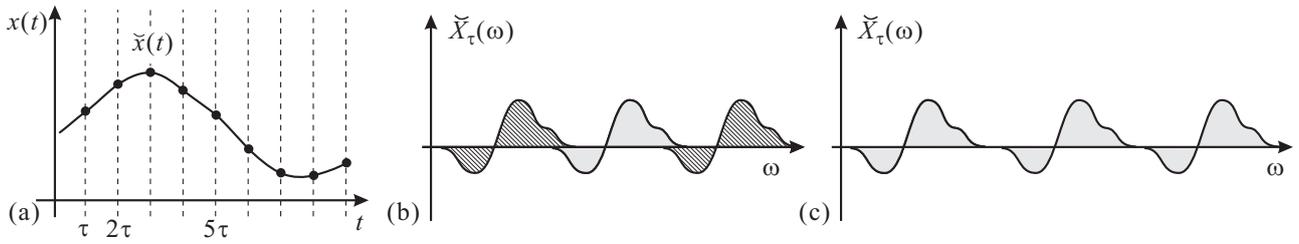


図 6.14 (a) 信号 $x(t)$ に対する標本 $\tilde{x}(t)$ を模式的に示した. (6.59) の定義は δ 関数のためこのようには描けないが, δ 関数の係数を点で示した. (b) $\tilde{x}(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{X}_\tau(\omega)$. 信号の持つスペクトルに比べ, τ が長く, 標本化定理が成立しない場合. (c) 標本化定理が成立する場合.

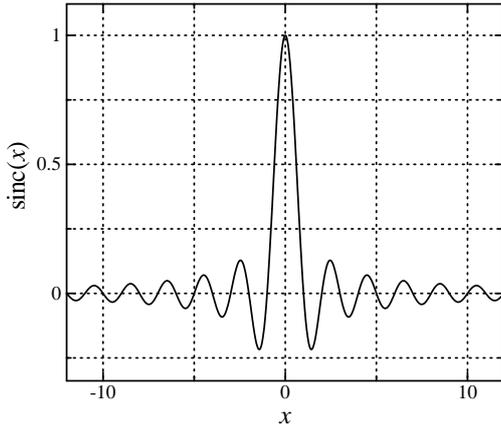


図 6.15 sinc 関数

もし, $X(\omega)$ が $\omega_\tau = \pi/\tau$ より大きな ω の成分を持たなければ, (6.62) の各 n に属する項は ω 軸上で重ならないから, 幅 $2\pi/\tau$ で $\tilde{X}_\tau(\omega)$ を切り出すことで完全な $X(\omega)$ が得られ, これから $x(t)$ が復元できる (図 6.14(c)). すなわち, 標本化により元の信号 $x(t)$ の性質を失わないための十分条件は, $x(t)$ が標本化周波数 $1/\tau$ の $1/2$ $1/2\tau$ 以上の周波数成分を含まないこと, である. 言い換えると, $x(t)$ が含む最高周波数の 2 倍の周波数で標本化すれば, $x(t)$ の性質は失われない. これを**標本化定理** (sampling theorem) と言い, $1/2\tau$ を**ナイキスト周波数** (Nyquist frequency, Nyquist rate) という.

$x(t)$ の復元過程は形式的には $\tilde{X}(\omega)$ に関数

$$P_{\pi/\tau}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{\pi}{\tau} \\ 0 & |\omega| > \frac{\pi}{\tau} \end{cases} \quad (6.63)$$

をかけ, 更に τ をかけて逆フーリエ変換する.

(6.63) の (逆) フーリエ変換は sinc 関数と呼ばれ,

$$\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (6.64)$$

で定義される関数^{*1}(図 6.15) を使って $(1/\tau)\text{sinc}(t/\tau)$ となるので,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\tau} \text{sinc} \left(\frac{t}{\tau} \right) * \tilde{x}_\tau(t) = \text{sinc} \left(\frac{t}{\tau} \right) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \delta(t - n\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{s}{\tau} \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\tau) \delta(t - n\tau - s) ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc} \left(\frac{t - n\tau}{\tau} \right) x(n\tau) \end{aligned} \quad (6.65)$$

が得られる. すなわち, 得られた離散測定値が標本化定理を満たしている場合, 標本値に sinc 関数を乗じて時間軸全域で加算することで $x(t)$ を復元することができる.

上の標本化定理は, 時間軸上で離散的な測定をする場合のものであったが, 周波数軸上で離散測定をする場合も考えられる. t 軸上の場合と全く同じで, ω 軸上の $X(\omega)$ 標本間隔を η とすると, $X(\omega)$ の復元のためにはフーリエ変換 $x(t)$ が時間 $2\pi/\eta$ 内に局在していることが十分条件となる.

標本化定理は, フーリエ変換 (波形の正弦波分解) の極めて基本的な性質を表すものということができ, 物理学の中にも多くの類似概念を見出すことができる. 例えば, 結晶格子中のフォノン (音波), 電子など.

^{*1} これは, 正規化 sinc 関数と呼ばれ, 信号処理などで良く使用される定義である. 数学では非正規化 sinc 関数 $\sin x/x$ を sinc 関数と呼ぶことが多い.

6.4.2 パルス変調

パルス変調は、搬送波としてパルス列を用いる方式で、やはり振幅変調 (PAM)、位置変調 (PPM)、幅変調 (PWM) 等がある。

パルス振幅変調

PAM 方式の場合、各パルスにどのように信号を乗せているかは別として、これらを何らかの方法により取得した場合、パルス列は時間に対する離散信号と見ることができ、受信側では前節の標本化信号が得られることになる。従って、復調のためには、信号帯域に対してパルス間隔が標本化定理の条件を満たしていることが必要である。前節では「十分」しか示していないが、間隔が広く、フーリエ成分に重なりが生じた場合は、単純にカットして復調した場合、重なりによってひずみ (aliasing noise, 折り返し雑音) が生じることが明らかである。

各パルスが間隔に比して十分狭く、デルタ関数 (インパルス) 列とみなせる場合は、PAM は前節の標本化定理そのものである。インパルス標本化、理想標本化などと呼ぶ。間隔 τ のインパルス列キャリアは $c(t) = \delta_\tau(t)$ であり、そのフーリエ級数展開は (6.61) である。また、式 (6.65) が入力信号と変調信号との関係を示している。更に、(6.62) のフーリエ変換が周波数スペクトルを表している。すでに前節で示したことであるが、一応入力信号、変調信号、変調信号スペクトルの例を示すと図 6.16 のようになる。

このようなデルタ関数的キャリアの PAM 信号 (理想 PAM と呼ぶことがある) の復調は、従って前節で述べた図 6.16(c) のスペクトルから最低周波数バンドだけ抜き出すフィルターにかければ良い*2 ことがわかる。このフィルターを伝達関数 $\Xi(i\omega)$ で表すと、これは (6.63) そのもの、すなわち $\Xi(i\omega) = P_{\pi/\tau}(\omega)$ である。

PAM 方式では、現実の信号の物理的制限から、パルス幅 τ_p が周期 τ に比べて無視できず、方形波として扱わなければならないことも多い。この場合、ヘヴィサイド関数 $H(x)$ あるいは、(6.63) で定義される窓関数を使ってキャリア $c(t)$ を

$$c(t) = \frac{1}{\tau_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[H\left(t - n\tau + \frac{\tau_p}{2}\right) - H\left(t - n\tau - \frac{\tau_p}{2}\right) \right] = \frac{1}{\tau_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{\tau_p/2}(t - n\tau) \quad (6.66)$$

と書くと、窓関数のフーリエ変換である sinc 関数 (6.64) を用いて、 $c(t)$ のフーリエ級数展開

$$c(t) = \frac{1}{\tau_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(n \frac{\tau_p}{\tau}\right) \exp\left(2n\pi i \frac{t}{\tau}\right) \quad (6.67)$$

が得られる。入力 $f(t)$ に対する変調信号 $s(t)$ は $s(t) = f(t)c(t)$ であるから、その周波数スペクトル (フーリエ変換) $S(i\omega)$ は $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(i\omega)$ と書いて

$$S(i\omega) = \frac{1}{\tau_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(n \frac{\tau_p}{\tau}\right) F[i(\omega - 2n\pi/\tau)] \quad (6.68)$$

である。

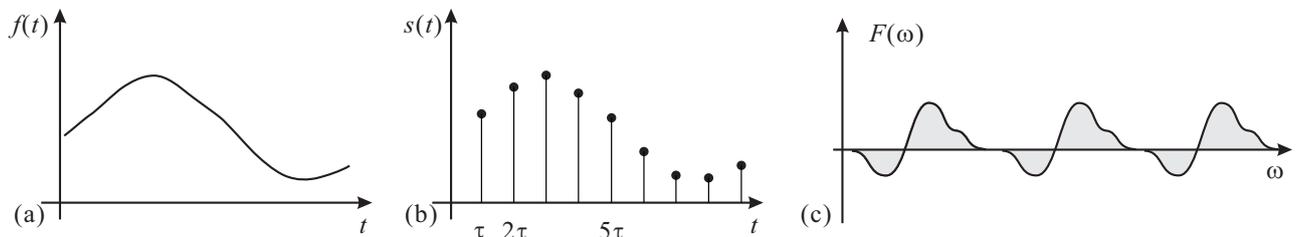


図 6.16 PAM 変調. (a) 原信号. (b) PAM 変調信号. (c) PAM のフーリエ変換スペクトル例. 模式図

*2 図 6.16(c) はパワースペクトルであり位相情報は失われているが、当然フィルターは各周波数に対して位相を保持するものでなければならない。

6.4.3 離散フーリエ変換

PAM の復調の場合などは特に問題となるが、実際にサンプリングによって手元に集められるデータは必ず有限時間のものである。このような有限時間サンプリングデータに対する処方箋として、特にフーリエ変換系の場合は周期関数化が有効な方法である。以下これを考え、離散フーリエ変換を導入する。

時刻 $[0, \zeta)$ の間だけゼロでない値を取る信号 $f(t)$ があり、そのフーリエ変換 $F(\omega)$ が $(-\pi/\tau, \pi/\tau)$ の区間だけでゼロでない値を取るとする。後の便宜のため、 ζ, τ を

$$N = \frac{\zeta}{\tau} \quad (6.69)$$

が正整数になるようにとっておく (f, F の定義を満たすような、 ζ, τ が適当に大きく取れることは明らかである)。 f から周期 ζ の関数を次のように作り出し、 \check{f} 、そのフーリエ変換を \check{F} と置く。

$$\check{f}(t) = f(t) * \delta_\zeta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - n\zeta), \quad \check{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\omega + n\frac{2\pi}{\zeta}\right). \quad (6.70)$$

周期関数 $\check{f}(t)$ は次のようにフーリエ級数展開できる。

$$\check{f}(t) = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(n\frac{2\pi}{\zeta}\right) \exp\left(2n\pi i \frac{t}{\zeta}\right). \quad (6.71)$$

指数 n を $n = l + mN$ (l, m は整数) と書いて n の和を $\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty}$ とする。 t を離散的な値 $t = j\tau$ (j は整数) に取ると、

$$\begin{aligned} \check{f}(j\tau) &= \frac{1}{\zeta} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left[(l + mN)\frac{2\pi}{\zeta}\right] \exp\left[(l + mN)2\pi i \frac{j\tau}{\zeta}\right] \\ &= \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{2\pi l}{\zeta} + m\frac{2\pi}{\tau}\right) \exp\left(2\pi i \frac{l j}{N}\right) = \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \check{F}\left(l\frac{2\pi}{\zeta}\right) \exp\left(2\pi i \frac{l j}{N}\right) \end{aligned} \quad (6.72)$$

と書ける。回転因子を

$$W_N \equiv \exp\left(-i\frac{2\pi}{N}\right) \quad (6.73)$$

とし、 $\eta \equiv 2\pi/\zeta$ と書くと、

$$\check{f}(j\tau) = \frac{1}{N\tau} \sum_{l=0}^{N-1} \check{F}(l\eta) W_N^{-lj} \quad (6.74)$$

と形式的に書くことができる。なお、 W_N の次の性質は明らかであろう。

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} \quad W_N^{n+mN} = W_N^n, \quad (6.75a)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} = \begin{cases} 1 & \text{for } m = 0, \\ 0 & \text{for } m \neq 0. \end{cases} \quad (6.75b)$$

(6.74) の両辺に τW_N^{mj} をかけ、 j について $0, \dots, N-1$ で和を取ると、特に (6.75b) の性質を使って次が得られる。

$$\tau \sum_{j=0}^{N-1} \check{f}(j\tau) W_N^{mj} = \sum_{j=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \check{F}(l\eta) W_N^{(m-l)j} \right] = \check{F}(m\eta). \quad (6.76)$$

そこで、 $n, k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$f_n \equiv \check{f}(n\tau), \quad F_k \equiv \frac{1}{\tau} \check{F}(k\eta) \quad (6.77)$$

と定義すると, (6.74), (6.76) は次の形に書けることになる.

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W_N^{kn}, \quad (6.78a)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k W_N^{-kn}. \quad (6.78b)$$

(6.78a) が **離散フーリエ変換** (discrete Fourier transform, DFT), (6.78b) がその逆変換を表している. 以上からわかるように, DFT は等間隔離散化 (標本化) された周期関数に対して適用されるフーリエ変換と見ることができ, フーリエ変換に対して成立する一般的な性質の多くを保持している.

(6.78) はまた, $\mathbf{F} = \{F_k\}$, $\mathbf{W} = \{W_N^{ij}\}$, $\mathbf{f} = \{f_i\}$ と置くことで,

$$\mathbf{F} = \mathbf{W}\mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{N}\mathbf{W}^*\mathbf{F} \quad (6.79)$$

と書くことができる. これより, $\mathbf{W}^*\mathbf{W} = N\mathbf{I}_N$ (N 次元単位行列) であるから, \mathbf{W}/\sqrt{N} がユニタリ行列になっていることがわかる. このように, 離散フーリエ変換において積分変換が有限次元線形代数に変換できたのは, 無論, フーリエ変換の線形性が最も重要な因子であり, それが離散化されることで可能になったことであるが, (6.69) のように逆空間スケールの比を整数 N にとって無限回の繰り返しを有限次数の空間に集積したことが重要なトリックであったことには注意しておこう.

現実実験で得られるデータは離散データでありかつ有限区間での測定であるから等間隔でないものは適当な補間で等間隔とし, また, 仮想的に測定区間で周期的な関数であるとすることで離散フーリエ変換が可能になる. 現実離散フーリエ変換をデータから実行する極めて速いアルゴリズムが **高速フーリエ変換** (fast Fourier transform, FFT) であり, 物理の実験家で FFT のお世話にならない人はまずいないという程ポピュラーな解析法である. いくつかのアルゴリズムがある内の 1 つを付録 J に示している.

6.4.4 z 変換

離散信号に対する離散フーリエ変換に対し, 同じく離散信号に対するラプラス変換を **z 変換** (z-transform) と呼んでいる. ただし, 有限時間信号に対する周期化の手法は使用できない. $t \geq 0$ での離散時間 (標本化) 信号

$$\tilde{f}_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau) \quad (6.80)$$

の (ラプラス変換を考えるため n の和を 0 以上 ($t \geq 0$) とした) ラプラス変換は

$$\mathcal{L}\{\tilde{f}_\tau(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau)\delta(t - n\tau)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau)\mathcal{L}\{\delta(t - n\tau)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau)\exp(-sn\tau) \quad (6.81)$$

で与えられる.

ここで,

$$z = \exp(s\tau), \quad (6.82)$$

更に, $f_n = f(n\tau)$, $F(z) = \mathcal{L}\{\tilde{f}_\tau(t)\}$ と置くと, (6.81) は

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \quad (6.83)$$

と書くことができる. この級数を **片側 z 変換** (one sided z-transform) と言い, $F(z) = \mathcal{L}[f]$ などと表す. (6.83) の級数が収束する領域はある正の実数 r_0 を使って一般に

$$|z| > r_0 \quad (6.84)$$

f_n	$F(z)$	収束領域
$\delta(n)$	1	全平面
1	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
n	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
n^k	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k \frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
a^n	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
$\sin(n\omega\tau)$	$\frac{\sin(\omega\tau)z^{-1}}{1-2\cos(\omega\tau)z^{-1}+z^{-2}}$	$ z > 1$
$e^{-n\alpha\tau} \cos(n\omega\tau)$	$\frac{1-e^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}}{1-2e^{-\alpha\tau}\cos(\omega\tau)z^{-1}+e^{-2\alpha\tau}z^{-2}}$	$ z > e^{-\alpha\tau}$

表 6.1 片側 z 変換の例と収束領域.

の形に表すことができる. 表 6.1 にいくつかの例を示した.

z 変換の逆変換は, Bromwich 複素積分法を用いると,

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c F(z)z^{n-1}dz \quad (6.85)$$

と書かれる.

(6.83) に対して, $n < 0$ でも f_n が有限値を持っている場合, 両側 z 変換 (bilateral z-transform) の必要が出てくる. デジタルフィルターなどでは両側 z 変換を考えることもそれ程稀ではない*3.

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}. \quad (6.86)$$

これは, ローラン展開と呼ばれるものであり, 収束領域は一般に $r_1, r_2 \in \mathbf{R}, 0 < r_1 < r_2$ を使って

$$r_1 < |z| < r_2 \quad (6.87)$$

のように表される.

性質名	信号	z 変換
線形性	$af_n + bg_n$	$aF(z) + bG(z)$
相似則	$f_{\alpha n}$	$F(z^{1/\alpha})$
時間移動	f_{n+k}	$z^k \left[F(z) - \sum_{l=0}^{k-1} f(l)z^l \right]$
時間移動 II	f_{n-k}	$z^{-k}F(z)$
スケール変換	$e^{\mp\alpha n} f_n$	$F(e^{\pm\alpha}z)$
スケール変換 II	$a^n x_n$	$F(a^{-1}z)$
インデックスとの積	nf_n	$-z\frac{d}{dz}F(z)$
微分	$n^k f_n$	$\left(-z\frac{d}{dz}\right)^k F(z)$
積分	$\frac{f_n}{n+a}$	$z^a \int_z^{\infty} \xi^{-a+1}F(\xi)d\xi$
畳み込み	$f_n * g_n$	$F(z) \cdot G(z)$
積	$f_n \cdot g_n$	$\frac{1}{2\pi i} \oint_c F(\xi)G\left(\frac{z}{\xi}\right)\xi^{-1}d\xi$

表 6.2 片側 z 変換の主要な性質. $\mathcal{Z}[f_n] = F(z), \mathcal{Z}[g_n] = G(z)$ としている.

*3 通常のラプラス変換でも無論, $t < 0$ の領域も考える両側ラプラス変換は存在する.

z 変換は次に示す伝達関数を通してデジタル信号処理システムの記述に、また、ラプラス変換と類似の性質を持つことから、ラプラス変換が演算子法を通して常微分方程式の解法に使用されたのと同様、差分方程式を解くのに使用されたりする。主要な性質について表 6.2 にまとめている。

6.4.5 離散化信号と伝達関数

離散化信号入力に対する線形システムの応答を考える。離散化信号を $\tilde{f}_\tau(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau)\delta(t - k\tau)$ のように書き、 $t = n\tau$ $n \in \mathbb{Z}$ とする。 $f_n = f(n\tau)$ とし、系の各 δ 関数に対する応答を $h_k = \mathcal{R}\{\delta(k\tau)\}$ と書くと、 $\tilde{f}_\tau(n\tau)$ に対する応答 g_n は、(離散) 畳み込みにより、

$$g_n = \mathcal{R}\{\tilde{f}_\tau(n\tau)\} = \mathcal{R}\left\{\sum_{k'=-\infty}^{\infty} f(k'\tau)\delta[(n - k')\tau]\right\} = \sum_{k'=-\infty}^{\infty} f_{k'}h_{n-k'} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k f_{n-k} \quad (6.88)$$

と表される。この時、 g_n の z 変換は

$$G(z) = \mathcal{Z}[g_n] = \mathcal{Z}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k f_{n-k}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k f_{n-k}\right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{n-k} z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} F(z)$$

と計算される。ここで、インパルス応答列に対する z 変換を

$$H(z) = \mathcal{Z}[h_n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k}$$

と書くと、

$$G(z) = H(z)F(z) \quad (6.89)$$

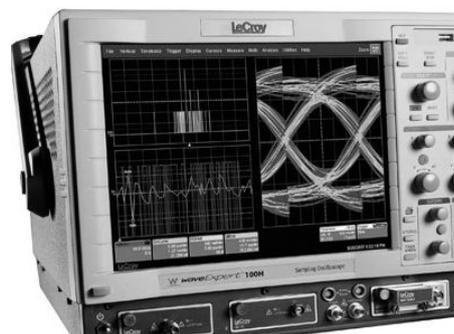
と、(2.11) 式と形式的に同じになる。そこで、この $H(z)$ をやはり、離散信号に対する伝達関数と呼ぶ。

第7章 デジタル信号とデジタル回路

7.1 デジタル信号序論

前章で時間に対して離散化された信号を扱ったが、信号レベルも離散化したものが**デジタル信号** (digitized signal) である。信号として意味を持つ最小の単位である2つのレベルを使用することが最も多く、この信号単位を**ビット** (bit) と称する。デジタル回路とは、このデジタル信号を扱うことを前提とした電子回路である。デジタル信号と言っても物理的には電磁気を用いた信号であることに変わりはなく、それを扱う回路も素子レベルまでブレイクダウンすればこれまでに見てきた回路素子と全く違いはない。しかし、前章終わりで見たように、離散化によって信号の現実的な扱いには大きな差が生じる。

更にデジタル-アナログ回路の差を明確にしたのが集積回路による回路のカプセル化であり、次節から紹介する線形/非線形の区別も概念上あまり意味をなさない程非線形な論理ゲート IC と、フィードバックを使って線形領域で運用することを主な使用環境とするリニア IC、その中間に位置する目的限定型の IC などのアナログ IC とでは入力に対する応答が全く異なる。デジタル-アナログでは全く異なる物理系を形成するようになり、この2つの「世界」の間をつなぐアナログ-デジタルインターフェイス回路のためにも専用 IC が作られるようになった。ところが、これまでも度々述べてきたようにデジタル回路が極めて早い応答を求められるようになり、同期のためのクロック信号周波数が飛躍的に高くなった結果、回路配線を伝送線路、信号を導体に沿う電磁波の一種として扱わなければならなくなった。Gbit/s (すなわち、1ns に1ビット以上の情報を伝送する) 伝送信号になると、右の写真のオシロスコープ画面波形のように、波形自身は離散化されていないアナログ波形として捉えなければならなくなり、エンジニアは両者渾然とした「電子回路」を相手とする必要が生じている。



これまで、信号としては時間 t に依存する1つの物理量 $f(t)$ として扱ってきたが、1伝送路で2値に離散化された信号を送るとすると、同時に n ビットの論理値を伝送するためには n 本の**並列** (パラレル) 伝送路が必要になる。そこで、一般にデジタル信号は多次元化して $q_i(t)$ のようにして扱う。 $\{q_i\}$ で1つの論理値を表すので、これを入力 $f(t)$ と思えば信号論としては1次元で扱うことになる。

デジタル回路の機能は、デジタル信号の伝送、演算、蓄積の3つにまとめられる。情報の形態は大きく違うものの、物理的な回路としては、アナログ、デジタルでの区別はなく、特に伝送路は何の違いもない。一方、回路の動作モードは、線形領域で使用することが多かったアナログ回路に比べ、デジタル回路ではほとんどが非線形領域での動作となる。

物理実験においては、パルスを扱う際の機器間の動作、タイミング調整のために自前のデジタル回路を構成する必要が生じる可能性がある。場合によってはPCによる処理が追いつかず、大掛かりなデジタル回路を自作せざるを得ないこともあるが、このような場合は最近ではFPGAを用いるのが普通である。が、これを行うためにも個別論理ゲートを用いたデジタル回路の知識は不可欠である。

7.2 論理ゲート

1ビット信号の2つのレベルに対しては、

1. 0, 1 に対応させて2進数で表す、
2. 偽, 真 (false F, true T) と対応させて論理値として扱う、

という処理が(もちろんこれらは同値)行われる. この論理値に対して「演算」を行う回路は, ブール代数の論理演算と1対1の対応があり, その動作は入力に対して出力(演算結果)を表す真理値表を用いて規定される. これを論理ゲート回路と称している.

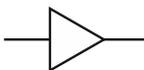
論理ゲート回路は, その出力が入力データだけで決定される**組み合わせ回路** (combinational logic) と, そのゲートの直前の「状態」にも依存する**順序回路** (sequential logic) とに別れる. 今, 論理ゲート回路の入力が n ビット, 出力が l ビットあり, 下の表のように, 時刻 t_1, \dots, t_m に対して入力が $\{f_{ij}\}$ で表されるように変化したとする. 入力が一定の間は変化直後の信号遅延時間を除いて出力は一定で変化しない(因果律). 時刻 t_j の入力変化に対して, 出力がどのように変化するかを表形式で示したものが**真理値表** (truth table) である. また, 入出力の変化を時間に対する矩形波形で表したものが**タイミングチャート** (timing chart) である.

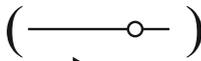
		input				output				
		t_1	t_2	\dots	t_m					
Ch.	1	0	1	\dots	f_{1m}	1	1	1	\dots	q_{1m}
	2	1	0	\dots	f_{2m}	2	0	1	\dots	q_{2m}
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
	n	0	1	\dots	f_{nm}	l	0	1	\dots	f_{lm}

以下, ごく基本的な論理ゲートに限って簡単に紹介しておく.

7.2.1 組み合わせ回路: 1入力ゲート

input	buffer	not
0	0	1
1	1	0

buffer 

()

not 

図 7.1 バッファ, 及びノットゲートの真理値表と回路図.

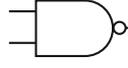
に挿入することで良く使用されるゲートである.

組み合わせ回路のうち, 入力が1つのみのゲートは, 図 7.1 に示す 2 種類である. この内, 中段に示した丸の記号は独立したゲートではなく, 否定(not)を表す記号であり, バッファ記号との組み合わせで not ゲートを表す. バッファは論理的には何もしていないが, 現実には例えばファンアウト(1つの出力を使って幾つものゲートを同時にドライブしたい場合)の数を取りたい場合や LED 点灯やモータードライブなど電力を必要とする回路に接続する際などに挿入することで良く使用されるゲートである.

7.2.2 組み合わせ回路: 2入力ゲート

2入力で出力が1のゲートは, 2つの論理値から1つの論理値を導くことに相当し, あらゆる論理演算の基本である. また, 他の組み合わせ回路は, すべてこれらの更なる組み合わせから構成できる. 特に重要なものは, 図 7.2 に示したような, 2入力に対して対称な応答をするゲートである. また, この図に示したように, ゲートの出力のところに1入力ゲートで示した白い丸を配することで「否定」を表し, 否定出力ゲートとすることができる. 真理値表では例として nand ゲートを示した. この nand ゲートはユニバーサルゲートであり, このゲート1つから他のすべての組み合わせゲートを構成することができる. 以下, 真理値表を用いて主要なフリップフロップの動作を紹介する. 順序回路であるから本来はタイミングチャートも描く意味があるが, 真理値表でも十分動作は規定できる.

input1	input 2	and	or	xor	nand
0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

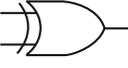



図 7.2 代表的2入力ゲートの真理値表と回路図

7.2.3 順序回路：フリップフロップ

順序回路の中で最も基本的なものがフリップフロップ (flip-flop, FF) であり、他の順序回路も FF と組み合わせ回路ゲートを用いて構成することができる。

RS フリップフロップ

リセット/セット (reset set, RS) フリップフロップは、単にラッチとも呼ばれ、データを保持 (ラッチ) する機能がある。図 7.3 のように R (reset) 入力と S (set) 入力に対し出力 Q と反出力 \bar{Q} が存在する。nand および not ゲートを使って図のように表現することもでき、実際汎用ゲートをこのように配線することで RS フリップフロップとして動作させることもできる。RS 入力によって Q (\bar{Q}) を決めると、入力が 0 に落ちてもこの値を維持し、次の RS 入力によって出力が変更されるまでこれを維持する。RS が同時に 1 を取ると、出力は不定になってしまう。

S	R	Q	\bar{Q}	動作
0	0	Q	\bar{Q}	不変
0	1	0	1	reset
1	0	1	0	set
1	1			不定

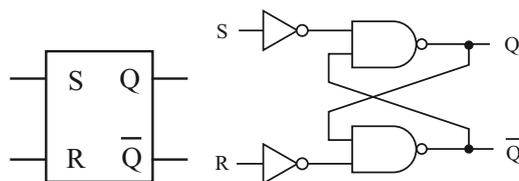


図 7.3 RS フリップフロップの真理値表、回路記号、及び、これを 2 入力論理ゲートで表した回路図。

JK フリップフロップ

JK フリップフロップは、クロック入力端子 (CLK) を持ち、クロック端子が 0→1 (あるいは 1→0) と変化する際に出力が変化する。その変化の仕方は、図 7.4 の真理値表のように規定されている。

J	K	Q	次の CLK 入力時の Q
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	—	0
1	0	—	1
1	1	0	1
1	1	1	0

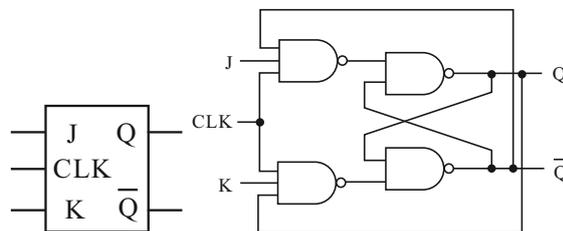


図 7.4 JK フリップフロップの真理値表、回路記号、及び、これを 2 入力論理ゲートで表した回路図。

D フリップフロップ, T フリップフロップ

D (データ) フリップフロップは、CLK 信号の立ち上がりで D 入力端子の値が出力され、以降、CLK が一旦下がって再び立ち上がるまでの間この値を保持する。T (トグル) フリップフロップは、T 入力端子の値が上下するたびに出力が反転する。これらの回路記号と真理値表を図 7.5 に示した。

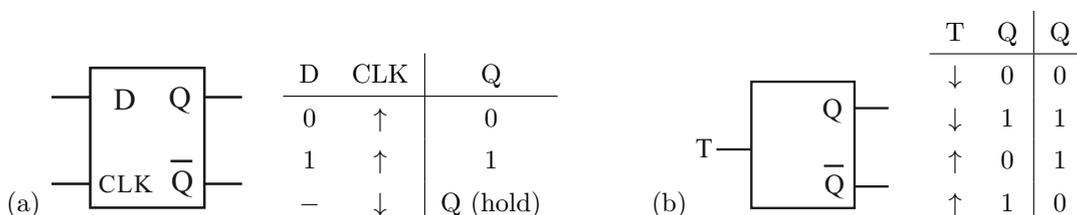


図 7.5 (a) D フリップフロップの回路記号と真理値表. (b) T フリップフロップの回路記号と真理値表.

JK FF による他の FF の表現

以上見てわかるように、紹介した FF は適当に配線、使用することで相互に入れ替えることが可能である。例えば、JK-FF を使って他の 3 つを表すと、図 7.6 のようになる。

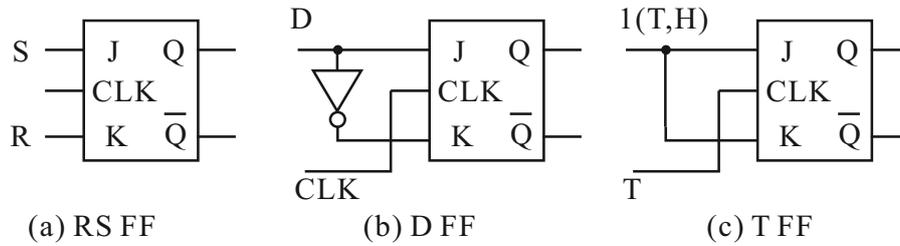


図 7.6 JK-FF を用いて, (a) RS-FF (クロック付), (b) D-FF, (c) T-FF を構成する. (c) で 1 (T, H) とあるのは, 1 の固定信号 (実際には電源の H(高電圧側)) を常時入力することを示す.

7.2.4 順序回路：カウンタ

カウンタは, 入力される信号の変化の回数を出力するものである.

非同期カウンタ

図 7.7 に示したのが最も簡単なカウンタ回路であり, 単に T-FF をシリーズで接続したものである. クロック入力信号が変化して 0→1 という変化が生じる度に 4 ビットの出力 2 進数が減少するダウンカウンタである. \bar{Q} 側を使えば, アップカウンタにすることができる. このカウンタは, 入力の变化が生じる度にその変化がゲートを一つずつ経て波のように広がってゆく. このことから, このような出力変化が同期していない非同期カウンタを「リップルカウンタ」とも呼ぶ.

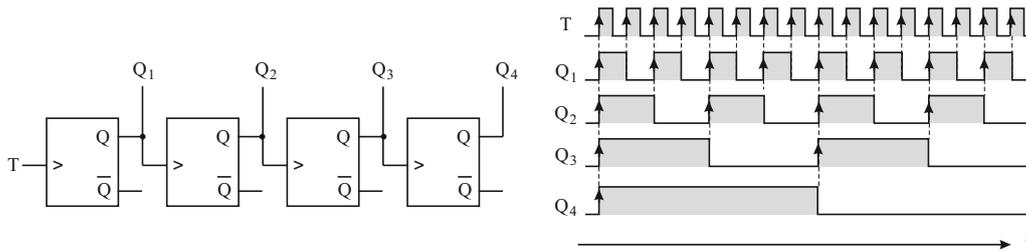


図 7.7 T-FF 4つを用いた最も簡単な 4 ビット非同期 (リップル)2 進ダウンカウンタ. 右はタイミングチャート.

同期カウンタ

リップルカウンタはリップルが広がっていく間は誤ったデータを出力していることになる. これに対して, 出力を (もちろんゲート遅延時間のばらつき誤差範囲で) 同時に変化させたい場合, 図 7.8 のような同期カウンタを用いる必要がある. このためには, カウント出力をデータとして予め用意し, D-FF を使ってクロック入力に同期して出力しラッチするのが簡単な方法である.

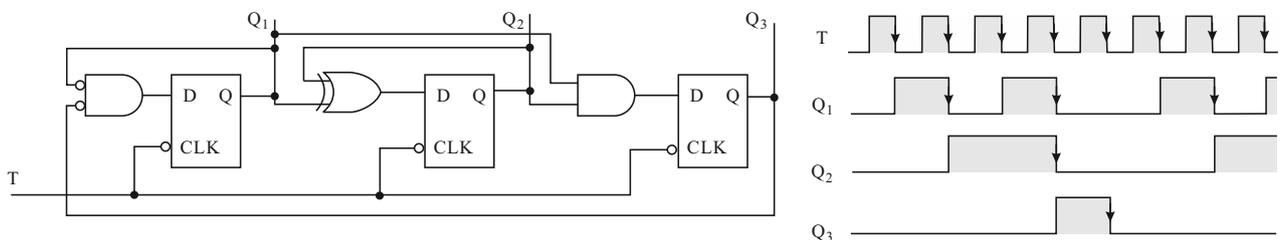


図 7.8 3 ビット同期アップカウンタ回路例とタイミングチャート. なお, CLK 信号入力に丸 (否定) が付いているのは, 信号の立下りで D-FF が D 入力を Q 出力へラッチすることを示す. また, 2つの丸に and ゲートがついたゲートは, 入力を a, b とすると, $\bar{a} \cap \bar{b}$ を表し, ド・モルガンの定理より $a \cup b$ であるから, nor ゲートと同じである.

付録 J: 高速フーリエ変換

まず、「時間間引き」アルゴリズムと呼ばれるものを紹介しよう。離散フーリエ変換 (6.78) の N を偶数に取る。また、添え字 n が表す数を偶数、奇数に分けて次のように書き直す。

$$F_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_N^{(2n+1)k} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nk}. \quad (\text{J.1})$$

2番目の変形では、 W_N の性質より、 $W_N^{2nk} = W_{N/2}^{nk}$ となることを使った。 $\{F_k\}$ を得るためには各 $k = 0, \dots, N-1$ について (J.1) を計算するが、このうち、 $k = N/2, \dots, N-1$ については、 $k \rightarrow k + N/2$ と置換え、 $W_{N/2}^{nN/2} = 1$ 、 $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ を使うと、

$$F_{k+N/2} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W_N^{k+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{n(k+N/2)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk} - W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nk} \quad (\text{J.2})$$

と書ける。ここで、

$$X_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n} W_{N/2}^{nk}, \quad Y_k = \sum_{n=0}^{N/2-1} f_{2n+1} W_{N/2}^{nk} \quad (k = 0, \dots, N/2-1) \quad (\text{J.3})$$

と置くと、これらはいずれも $N/2$ 点の離散フーリエ変換 (DFT) と見ることができる。元の $\{F_k\}$ はこれらを用いて

$$\left. \begin{aligned} F_k &= X_k + W_N^k Y_k, \\ F_{k+N/2} &= X_k - W_N^k Y_k, \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, N/2-1 \quad (\text{J.4})$$

と表される。

以下、 N が 2 のべき乗として $N = 2^q$ (q は整数) という数であったとすると、この手順を繰り返せば、最終的には 1 点の DFT を N 個求め、 $(N/2) \log_2 N$ 回の積を実行することに帰着する。1 点の DFT は 1 の乗算で計算不要であり、計算量は $(N/2) \log_2 N$ 回の乗算で、元の DFT の N^2 回の乗算に比べると、大幅に計算量を減らしたことになる。逆フーリエ変換も、同様に「周波数間引き」を用いることで行うことができる。

物理屋のための電子回路論 第 13 回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2017 年 1 月 8 日

7.3 論理ゲートの実装



以上簡単な例で見たように、IC へのカプセル化によって回路図や配線は劇的に簡単になり論理 IC のピン間を回路図通りにつなげば良い、と考えられていた時期があった。このため、自作のデジタル回路では、左の写真のように長いピンを持つ IC ソケットに硬めの配線を巻き付けて結線するワイヤラッピング配線法が盛んに使用されていたこともあり、現在でもシミュレータで十分に拾いきれない問題を調べるため、テスト回路などでは使われている。しかし、すでに述べたように、高いクロック周波数での動作、また前回述べた EMC の観点などから、このような配線法はあまり行われなくなり、自作やテストも FPGA を用いることが多くなった。

以上は余談であり、本節の目的はこのように「カプセル化」されているデジタル IC 論理ゲートのアナログの自身について簡単に見ておくことである。これは、カプセルブロック化した IC の様々な物理的規定がどのような原因で生じているかを理解するためである。図 7.9 に論理ゲートの回路構成法の代表である、TTL (transistor-transistor logic) と CMOS (complimentary metal-oxide-semiconductor) による nand ゲートの構成例 (等価回路) を示した。いずれも 4 つのトランジスタまたは FET で構成されているが、その仕様のされ方はかなり異なっている。

(a) の TTL 構成では、入力にダブルエミッタトランジスタを用いている。これは挿入図にも示したように 2 つのトランジスタが並列になっているものとして動作を理解することでができる。従って、 A_{in} または B_{in} が 0 (L, GND) であれば、トランジスタ Q_1 が ON になって電流が流れ、 Q_2 を ON にする。 Q_3 と Q_4 はプッシュプル回路を構成しており、 Q_2 が ON の時は Q_3 が ON で Q_4 が OFF、 Q_2 が OFF の時は Q_3 が OFF で Q_4 が ON になるように回路定数が決められている。以上から、入力が両方 H になった時のみ Q_1 が OFF になって出力が GND 側に振れ、nand 動作をすることがわかる。この回路から、TTL では入力レベルとして初段のトランジスタを ON/OFF することが求められること、出力は V_{CC} から GND まで振れるわけではなく、出力段のプッシュプルトランジスタによる電圧ドロップを考慮しなければならず、また、出力の負荷抵抗によって出力電圧が変化することも理解される。

これに対して、(b) の CMOS 構成は非常に簡潔である。complimentary という名前の通り、必ず p チャネル、n チャネル両方の MOS-FET を使用する。これは、全く同じ入力電圧に対して ON と OFF の逆の動作をするスイッチが使えることを意味し、このような入力に対して自在に V_{CC} 側と GND 側をつなぎ替えることが可能である。(b) では、 A_{in} 、 B_{in} の H 信号に対して OFF になる p-MOSFET を V_{CC} に並列につなぎ、ON になる n-MOSFET を GND に直列接続している。このため、両方が H になった時のみ出力が GND に接続され、それ以外は V_{CC} に接続されて nand 動作をすることがわかる。MOS 回路は次段の入力抵抗が非常に高いのが普通であり、これに対して FET の ON 抵抗は無視でき、ON/OFF 電圧の V_{CC}/GND からのずれは、FET の自己バイアス分で TTL に比べて大きな出力の振幅が取れることがわかる。もちろん、この素朴な回路では、電源側に接続した並列回路と接地側の直

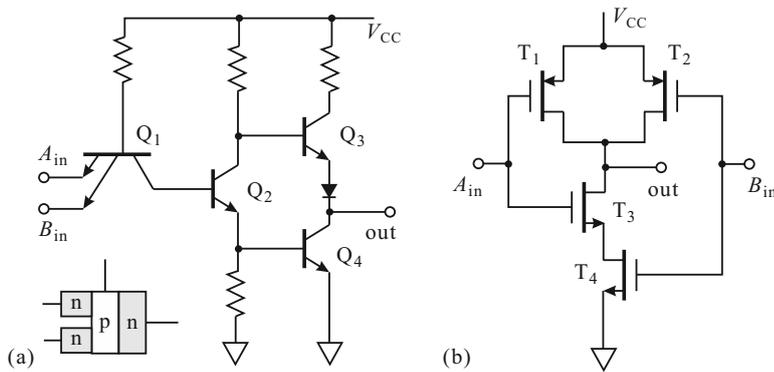


図 7.9 (a) TTL 構成による nand ゲート内部回路の等価回路例. 挿入図はダブルエミッタトランジスタの層構成模式図. (b) CMOS 構成による nand ゲート内部回路の等価回路例. 内向き矢印 MOS-FET は p チャネル, 外向き矢印は n チャネル. (エンハンスモード)

列回路とが遷移領域で同時に ON となって筒抜けになる危険性があるなど, この周辺に様々な安全回路を設ける必要がある.

以上から, 論理ゲートを動作させるための特徴的な電圧が, V_{CC} を 5V に設定した場合, 図 7.10 のようになることが理解される. ただし, 特に TTL の場合, 適当な負荷や電源の周囲配線を行うことが前提となっている. また, V_{CC} を 5V から大きく変更することは, TTL の場合, 通常の半導体物質パラメタから困難であることも理解されるであろう.

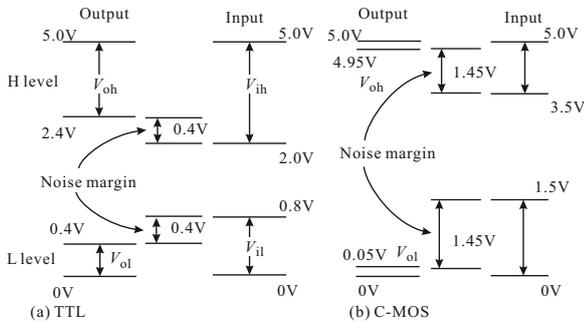


図 7.10 標準論理ゲート動作の電圧ダイアグラム. (a) TTL, (b) C-MOS

歴史的にみると, IC 化され論理ゲートして盛んに使用され始めたのは TTL が先であり, 圧倒的な利用範囲を持っていたため論理信号の H, L が 5V, 0V というのが標準となった. 初期の頃の CMOS IC は, 動作のためにむしろ高い電源電圧を必要とし, TTL 回路と接続のためにはレベル変換回路を用意したりした. また, やはり初期は CMOS の動作速度は TTL を改良した LS 型, ALS 型に及ばず, PC の周辺回路等, ほとんど TTL で組まれていた. しかし, クロック周波数が高くなり LSI の集積度が高くなるにつれて, 素子間の距離をできるだけ短くすることが非常に重要になり, ゲートあたりの素子数が少なく, 電流がゲートの帯電/放電時のもの程度で消費電力が極めて小さい CMOS が次第に有利となった. 素子特性も単ゲート化によってむしろ改善され 5V より低い電圧でも十分動作するようになり速度も向上した. 3.3V や 2.5V を H レベルとする回路も増え, 最近では京などのスーパーコンピュータの CPU も CMOS となり, 現在のところ論理ゲートの世界は CMOS に完全支配されてしまったように見える.

ただし, CMOS も含めて論理演算そのものが現在様々な物理的壁に当たっており, 並列計算などのソフトウェア手法で全体としての行き詰まりを回避しているのが現状であるから, ハードウェア側にも何か大きなブレークスルーがある可能性はある.

7.4 論理演算の回路化と簡単化

アナログ回路が力学系など, 物理系の表現と見ることができたのに対し, デジタル演算回路は, 論理式の具体的表現と見ることが出来る. 従って, 論理式が演算を代数的に行うことで簡単化されれば, 回路を簡単化することになる. その代表的方法を説明する. また, 順序回路は「状態」概念が入ってくるため, これに対応する論理式側の取り扱い概念が必要となる. その 1 つ (ツール) であるダイアグラムを紹介する.

7.4.1 カルノー図

A, B を論理値として論理式

$$Y = A \cdot B + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \quad (7.1)$$

を考える. \cdot は and, $+$ は or を表す. 論理値においては, $A + A = A$ であったことから, 右辺に $A \cdot B$ を加えて変形すると

$$\begin{aligned} Y &= A \cdot B + A \cdot B + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B \\ &= A \cdot (B + \bar{B}) + B \cdot (A + \bar{A}) = A + B \end{aligned} \quad (7.2)$$

となり, 単なる or 演算であったことがわかる. $A \cdot B$ を加えるような論理演算は式だけでは思いつきにくく, 真理値表を眺むなどの非機械的手法がむしろ有効である. これを比較的機械的に行う手法がカルノー図 (Karnaugh map) の手法である.

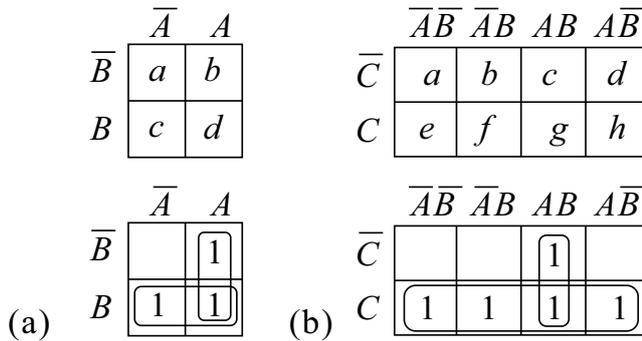


図 7.11 カルノー図の例. (a) 2 論理変数に対するカルノー図. 下は or 論理演算の場合. (b) 3 論理変数に対するカルノー図. 下は, $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C$ の場合.

カルノー図とは, ある論理式に対し図 7.11 のようにそれを構成する論理変数のすべての場合を 2 次元に並べて書いたものである. マスの中には出力が 1 (T) となる場合のところに 1 を入れるようにする. 3 変数の場合, 2 変数ずつをまとめて書くと図 7.11(b) のように 2 次元にしておくことができる. この時, 隣の列を作る際に 2 変数同時に否定を取ることはせず, 1 つずつ取って場合を潰すことが必要である. このように論理変数の数が増加すると次第に図が描きにくくなる.

式 (7.1) の場合をカルノー図に描くと図 7.11(a) の下の図になる. 隣接する「1」を で括ると, 2 つの括りができることがわかる. すなわち, このカルノー図が表す論理式は, この 2 つの「括り」が表す論理式の or を取ったものである.

$$Y = A \cdot \bar{B} + A \cdot B + \bar{A} \cdot B + A \cdot B = A + B \quad (7.3)$$

と, 当然 (7.2) の結果が得られる. 図 7.11(b) の下の図は

$$Y = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C + A \cdot \bar{B} \cdot C + A \cdot B \cdot C = A \cdot B + C \quad (7.4)$$

である.

以上見てわかるように, カルノー図による簡単化の原理は

$$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A \quad (7.5)$$

という簡単なものであるが, 図 7.11 のように 2 次元に並べて隣接する 1 を括ることでこのようにして消せるペアを組織的に見つけられる, というところが利点である. なお, 「隣接する 1」を探す際, 行や列の端同士は隣接している, と見なければならぬので注意が必要である. 例えば, 図 7.11(b) の上の図で a と d や e と h は隣接している.

7.4.2 クワイン・マクラスキー法

この簡単化を更に機械的手続きにすることを考える。このためには、最初に与えられた論理式の形は、簡単化を標準化するためにはむしろ障害になることが多く、カルノー図のように一旦真理値表で表してしまい、そこから一定の標準的手続きにより論理式に戻すことにする。

論理式 $Y = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$ を考える。真理値 0, 1 に対して、各論理変数を与える関数 g_i を

$$g_i(0) = \bar{A}_i, \quad g_i(1) = A_i \quad (7.6)$$

と定義する。各変数またはその否定をすべて1つずつ含む論理式(項)を**標準項**(canonical term)という。うち、論理和 + を区切りとして分解される「項」の数が最も少ないものを最小項と呼ぶが、最小項は当然項数1個であるから、結局最小項とは、 $\prod_{i=1}^n g_i(a_i)$ で表される。 $a_i = 0$ または 1 で、 \prod は論理積を表す。 Y を真理値表で表す時、ある1行の入力項は 0 または 1 の n 個の真理値列であるから、これを $\{a_i\}$ と見ると、真理値表の各行に1個の最小項が対応することがわかる。そこで、 $Y = 1$ を与える $\{a_i\}$ をすべてリストアップして指数 j を付け、行列の形で $\{a_{ij}\}$ と表すと、 Y の論理式としてこれらで指定される最小項をすべて論理加算したもの

$$Y = \sum_j \prod_{i=1}^n g_i(a_{ij}) \quad (7.7)$$

を考えることができる。このように最小項の論理和での論理値の表現を**主加法標準展開**(principal disjunctive canonical expansion)と呼ぶ。

主加法標準展開から(7.5)を使い冗長項を圧縮していく。この時、最小項を作るために考えた $\{a_i\}$ を並べたものを2進数として取り扱う方法を特にクワイン・マクラスキー法(Quine-McCluskey algorithm)と呼んでいる。これら最小項を表す2進数を、その中に出てくる「1」の個数で分類する。2進数表示での(7.5)は、0と1とを取るある桁以外は同じ2進数の間でこの桁を消去する式であるから、圧縮はこの分類で1つだけ異なるグループ間で行われる。消去した桁は(アンダースコア)として並べることで第1次圧縮リストができる。再度1の個数で分類、圧縮を可能な限り繰り返す。

こうして簡単化された論理式について、各項(「主項」と呼ぶ)を行指数とし、元の主加法標準展開に含まれる最小項を列指数とする(反対でも良い)表(主項図)を作る。最小項の中に何らかの形で主項が含まれている欄に印をつける(○とする)。例えば、主項が $_111$ であれば、0011, 0111, 1011, 1111 の4つがそれに当たる。論理的には「これらの最小項を主項が包含する」ことになる。この表をまず縦に見て、○が1回だけ現れる最小項の○を◎に変更する。次に横に見て、◎がついた主項(必須項)の行に◎になっていない○があればこれをすべて◎に変更する。最後に○しか付いていない主項が省略候補である。すべての最小項をカバーするように必要な主項があれば残し、後を省略することで簡単化が終了する。

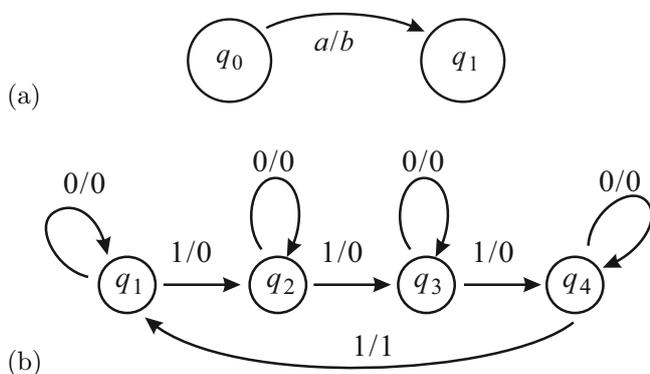


図 7.12 状態遷移図。(a) 概念図。(b) 4進カウンタ。

7.4.3 状態遷移図

順序回路を設計する際に、ダイアグラムとして助けになるのが**状態遷移図**(state transition diagram)である。これは図 7.12(a)のように、入力 a に対して回路の状態が q_0 から q_1 へと遷移し、 b が出力されることを表している。

これを使って、7.2.4 節で見たカウンタ回路の設計手順を追ってみる。簡単のため、2ビット(4進)カウンタとする。カウント入力が入る度に状態が変化し、初期状態から4つ目のカウント入力で1を出力して初期状態に戻るから、状態は全部で q_1, \dots, q_4 の4つで

ある。図 7.12(b) のようにこの 4 つの状態を並べて書き、入力 $x = 0$ の場合は状態が変化せず出力も 0 なので、0/0 でループを描いて元の状態に戻り、1 に対しては状態が 1 シフトし、 $q_4 \rightarrow q_1$ の初期値に戻るときのみ 1 が出力されるので 1/1、それ以外は 1/0 となる、ということで、図 7.12(b) のような状態遷移図が描かれる。

2 ビットであるから T-FF を 2 個使用して実現することにする。これら 2 個の出力を、状態 q_n に対してそれぞれ、 $Q_n^{(1)}$ 、 $Q_n^{(2)}$ と書く。 n は 4 進で回る、すなわち $4 + 1 = 1$ とする。状態遷移表をカルノー図の形にするため、 $Q_{n+1}^{(1)}$ と $Q_{n+1}^{(2)}$ とに分けて描くと次のようになる。ただし、最初にビットが上がる方を (2) の T-FF としている。 $(Q_{n+1}^{(i)})$ を決めるための論理変数が、 x 、 $Q_n^{(1)}$ 、 $Q_n^{(2)}$ の 3 つ存在するため、図 7.11(b) を縦にした図になっている。

		$Q_{n+1}^{(1)}$				$Q_{n+1}^{(2)}$	
		x				x	
$Q_n^{(1)}$	$Q_n^{(2)}$	0	1	$Q_n^{(1)}$	$Q_n^{(2)}$	0	1
0	0			0	0		1
0	1		1	0	1	1	
1	1	1		1	1	1	
1	0	1	1	1	0		1

カルノー図であるから、 で隣接する 1 を囲い、単純化により次のような漸化式を得る。

$$Q_{n+1}^{(1)} = \bar{x} \cdot Q_n^{(1)} + Q_n^{(1)} \cdot \bar{Q}_n^{(2)} + x \cdot \bar{Q}_n^{(1)} Q_n^{(2)}, \quad (7.8a)$$

$$Q_{n+1}^{(2)} = \bar{x} \cdot Q_n^{(2)} + x \cdot \bar{Q}_n^{(2)}. \quad (7.8b)$$

また、一般に FF については、入力 x で表される論理式 α 、 β を用いて

$$Q_{n+1} = \alpha Q_n + \beta \bar{Q}_n \quad (7.9)$$

という、特性方程式 (characteristic equation) と呼ばれる式が成立する。実際、図 6.5(b) の T-FF の真理値表から、 $\alpha = \bar{T}$ 、 $\beta = T$ として、(7.9) が成り立っていることがわかる。T-FF の (1)、(2) に対応して $\alpha_{1,2}$ 、 $\beta_{1,2}$ と添字をつけると、(7.8a)、(7.8b) より、

$$\alpha_1 = \bar{x} + \bar{Q}_n^{(2)} = \overline{x \cdot Q_n^{(2)}}, \quad \beta_1 = x \cdot Q_n^{(2)}, \quad (7.10a)$$

$$\alpha_2 = \bar{x}, \quad \beta_2 = x \quad (7.10b)$$

である。以上から、図 7.13 の回路図がほぼ自動的に描かれる。

7.5 A-D/D-A コンバータ

アナログ信号をデジタル信号に変換する、あるいはその逆の動作をする回路は、物理実験では極めて重要である。D-A/A-D 変換回路技術は、音響・映像技術にデジタル技術が入り込んで以来飛躍的に発展した。素子性能の向上による性能向上ばかりでなく、信号形式、回路方式の改革によって古い電子回路の教科書はみな書き換えなければならないほどの進歩が積み重ねられている。ただし、A-D/D-A 技術に関しては、CCD 技術、画素式ディスプレイの発達によりまず映像系からアナログ回路がほとんどなくなり、音響においても D 級アンプやスピーカーのデジタ

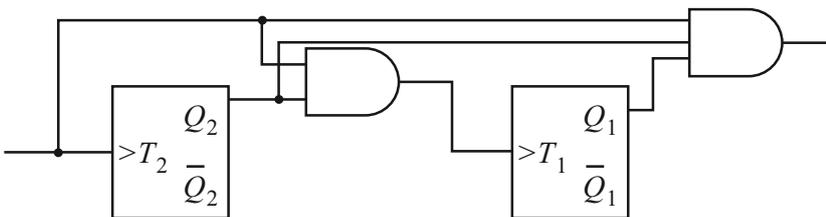


図 7.13 設計した 4 進 (2 ビット) カウンタ

ル駆動によりアナログ回路はデジタルのカプセルの向うの存在となりつつあることから、今後はこれまでのような急速な進展はないかもしれない。

「変換回路」と言っても、一方(アナログ)が物理量であるのに対して他方(デジタル)は、人間がこれを記述するために考えた記号であるから、「変換」のためには極めて様々なアイデアが存在しうる。これらは、変換形式に従い、外部クロックが必要になるなどの若干の使用法の違いはあるものの、A-Dコンバータ(ADC)、D-Aコンバータ(DAC)としてLSI化されてカプセル的に使用することが可能で、内部形式を知らなくても使えてしまう。それでも、どのようにして変換しているのか知っておくことは、電子回路の応用例としても悪くはない。代表的な回路形式を紹介しておこう。

7.5.1 デジタル-アナログ変換

まず、デジタルからアナログへの変換を考えよう。

抵抗ストリング型、ラダー型

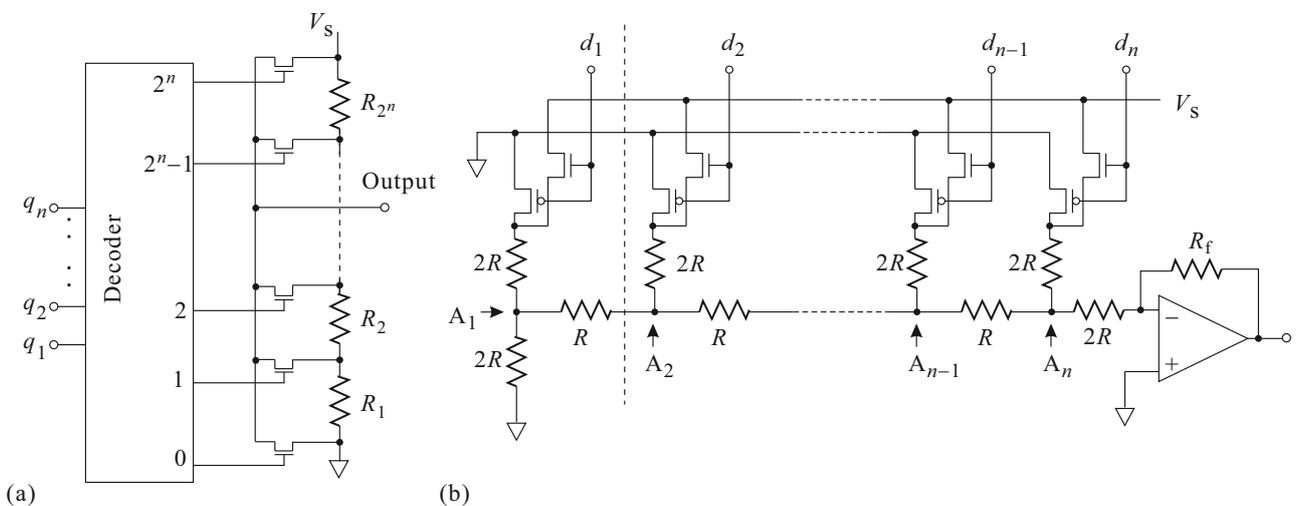


図 7.14 抵抗ネットワークを用いた D-A コンバータの等価回路図。(a) 抵抗ストリング型。(b) 抵抗ラダー型。
FET スイッチは、ゲートに○がついていないものが n チャネルで H 入力に対して ON, 反転記号である○がついているものが p チャネルで H 入力に対して OFF となる。

抵抗ネットワークを使用するものの内、図 7.14(a) に示した抵抗ストリング型は、余り現実性はないが、コンセプトとしては最も単純なものである。 n ビットのデジタルデータは 2^n の分解能を持っている。そこで、回路は標準電圧 V_S を持っているとし、これを、 2^n 個の同一抵抗値 R を持つ抵抗を直列につないだ回路に印可する(他端はグラウンド)。グラウンドから順番に抵抗に $1, \dots, 2^n$ の番号を付けると、 i 番目と $i+1$ 番目の抵抗の間の配線部の電位は、 $i \times V_S / 2^n$ となり、出力へは図のように、MOS スイッチを用いて接続する。受電部の入力インピーダンスを十分高くし、バイアス電流を抵抗ストリングに流す電流に比べて十分に低く取ることで $i \times V_S / 2^n$ をそのまま出力できる。

この方法は現実問題として、8 ビットでも 256 個の高精度抵抗と MOS スイッチを結線する必要があり、デコーダーも同じだけの数の出力を要するなど、使いにくいものである。

これに対して実際にもよく使用されるのが図 7.14(b) の抵抗ラダー型 DA 変換である。 $n-1$ 個の抵抗値 R の抵抗と $n+2$ 個の値 $2R$ の抵抗を用意し、 n ビットの入力ラインを図のように相反性 MOS スイッチのゲートに接続し、 $2R$ の抵抗を介して R の抵抗を直列にした各端点に接続する。最低ビットラインの端点は $2R$ で接地し、他端はやはり $2R$ でこちらは OP アンプの反転増幅器の $-$ 入力への入力抵抗として使用する。

OP アンプの項で学んだように、 $-$ 入力端子は仮想接地されているので、ここでは右端の $2R$ もやはり接地されているものとして A_n 点の電位を考える。今、 k ビット目が 1(H) で他はすべて 0(L) が入力されたとする。 A_n 点から右および上方の接地側を見ると $2R$ の抵抗が 2 個並列になっており、合成抵抗 R で接地されている。従ってその左の

A_{n-1} 点から右方向の A_n 点を通る経路の接地までの合成抵抗はやはり $2R$ で A_n 点と状況が全く同じであることがわかる。これが、 A_{k+1} 点まで続く。 A_{k-1} 点より左側を見ても、全く同じ状況である。従って A_k 点は、左右に $2R$ で接地され、 V_S より $2R$ を通して接続されていることがわかる。結局流れる全電流は $V_S/3R$ 、片方の分岐に流れるのはその $1/2$ である。以下、分岐ごとに $1/2$ になるので、最終的に OP アンプ方向へ流れ出す電流は

$$J_{\text{out}} \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ n & k & 1 \end{pmatrix} = \frac{V_S}{3R} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} = \frac{V_S}{6 \cdot 2^n R} 2^k$$

となる。 J_{out} の引数は、入力を 2 進数で表したものになっている。従って、入力 $\{d_i\}$ ($d_i = 0$ or $1, i = 1, \dots, n$) があつた時の OP アンプ出力は、重ね合わせの定理 (2.5 節) を用いて、

$$V_{\text{out}}(\{d_i\}) = -\frac{1}{3 \cdot 2^n} \frac{R_f}{2R} V_S \sum_{k=1}^n 2^k d_k \quad (7.11)$$

となつて、AD 変換がされている事がわかる。ストリング型に比べて必要抵抗は圧倒的に少なく、デコーダなども必要としない。実際多用される形式である。

この他、受動素子ネットワークを用いるものとしては、容量アレイ型などがある。

電流加算型

原理的にはたいへん簡単な変換法であり、レポート問題として考えてもらう予定。

容量アレイ型

これも簡単なので、レポート問題として考えてもらう予定である。

パルス幅変調型

パルス幅変調 (pulse width modulation, PWM) は、どちらかと言うとアナログ信号を PWM 信号にしてパワートランジスタをスイッチすることで電力増幅し、ローパスフィルターでアナログ信号に戻す、アナログ電力増幅に用いることが多い。が、無論、速くて正確なクロック信号とカウンタを用いてデジタル的に PWM 信号を作り出すことができ、これをローパスフィルターに通すことで DA 変換ができる。

原理は以上で終了、という位簡単明瞭である。逆に PWM 信号を作り出す方法の一例を図 7.15 に示した。クロックに同期したのこぎり三角波を作り出し、原信号でベースラインをシフトさせる。これをコンパレータに入れてこの変調三角波が閾値電圧を超えた領域だけ H 信号を出すようにすることで、PWM 信号が得られる。

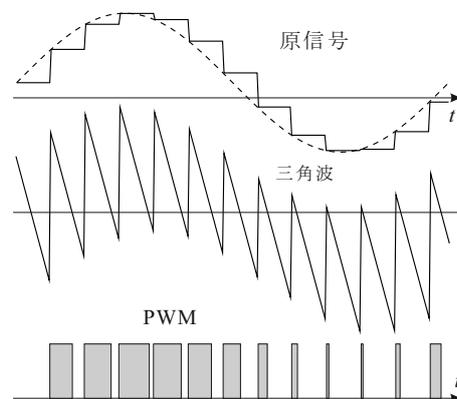
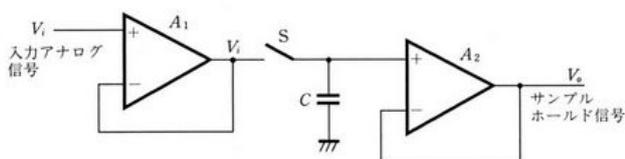


図 7.15 パルス幅変調法の一例。

7.5.2 アナログ-デジタル変換

逐次比較型

この方式では標本回路 (sample and hold circuit) により入力電圧を固定しておき (これは、他の多くの方式でも用いられる)、DA 変換によって既知電圧を作り出し、これとホールドした電圧とが一致するかどうかを調べることでデジタルデータに変換する。様々な意味での「既知電圧」を次々とホールド電圧と比較することから逐次比較 (successive approximation) 型と呼ばれている。



サンプルアンドホールド回路 (AD 変換回路ではトラックアンドホールドと呼ばれることもある) にも多くの形式があるが、左図に挙げるものが最も簡単である。信号によってキャパシタにチャージし、これを OP アンプにより孤立状態にして維持する。新しくサ

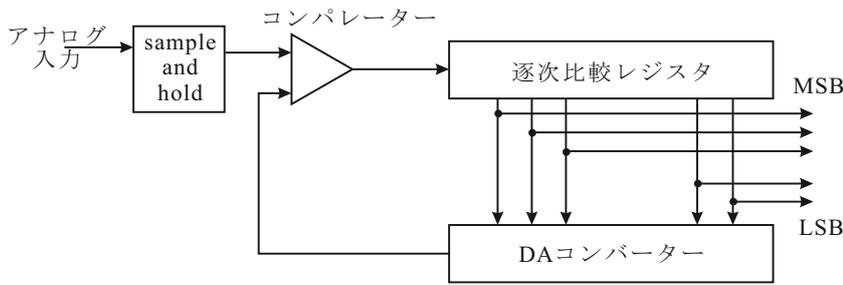
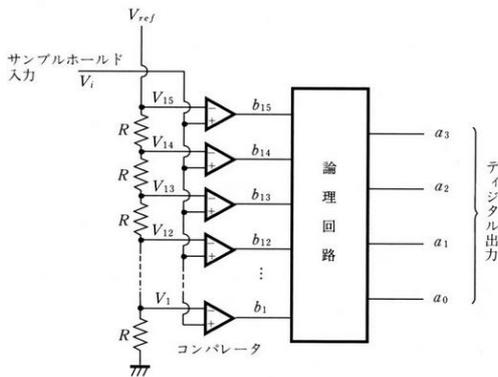


図 7.16 逐次比較型 AD コンバーターのブロックダイアグラム

サンプルするには、放電するのが一般的であるが、信号時間変化が緩やかでかつ低出力抵抗である場合は、帯電状態で接続することも考えられる。

2進数に変換することから、逐次比較は高いビットから、数値計算でいう2分法によって行うのが一般的である。最初に最高ビットのみを立てた参照電圧をDACにより用意し、コンパレータで比較する。コンパレータもまた、OPアンプを開ループ(可能な限り大きな開ループゲインを持たせる)で使用するのが精度的に有利である。参照電圧がサンプルより大きければ0、小さければ1が立つ。このデジタル信号の次のビットを立てたものをDACに入れて次の参照電圧を作る。以下最終ビットまで繰り返すことでデジタル変換が完了する。

フラッシュ型



逐次比較型は1ビットごとに変換していくので変換回路は1回路で済むが、多ビットのAD変換を行う場合にはビット分だけのサイクルを繰り返す必要があり時間がかかるようになる。これに対して、多数のコンパレータを並べて一気にAD変換を行おうというのがフラッシュ型ADCである。左図のように、抵抗ストリング型DACのちょうど逆のような形式である。

パイプライン型

フラッシュ型は逐次比較型に比べて圧倒的な速度を持っているが、当然ながら分解能分の分割抵抗とコンパレータという消費リソースも巨大となる。また、精度限界はコンパレータの開ループゲインAで決まることが多い。例えば、Aが100dBだと

すると、入力 $10\mu\text{V}$ で出力は1Vになり、デジタル回路がTTLレベルで動作しているとすると、しきい値電圧 V_{th} には到達しない。さりとて、アナログアンプで例えば10倍に増幅して入力しようとする、アンプの出力、あるいはコンパレータの入力の飽和値によってアナログ電圧の大きさが制限されてしまう。

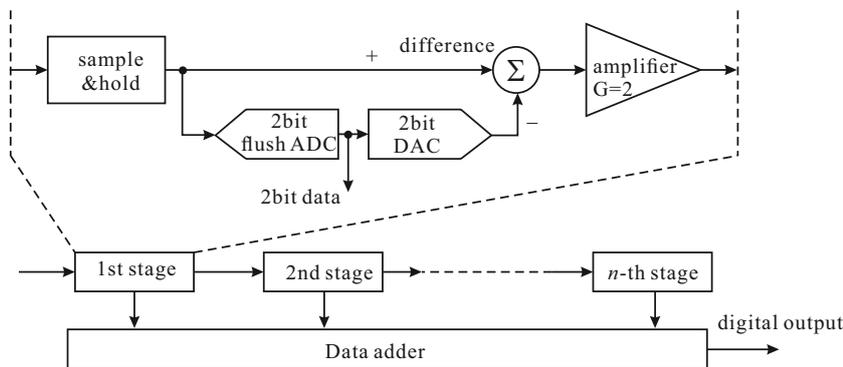


図 7.17 2ビット単位パイプライン型ADCのブロック図

このような欠点を、速度を若干犠牲にしながらカバーする方式が幾つか使われており、パイプライン型はその1つである。図7.17はそのブロック図(後述)で、数ビットをまとめてフラッシュ型でAD変換し、残った信号を増幅器で増幅しながら次のサイクルを行うようになっている。フラッシュ型と逐次比較型の間の子のような形式である。

積分型

逆に時間はかかるができるだけ少ない部品リソースでAD変換を行おうというのが積分型ADCで、積分回路に定電流を流して時間に対してリニアに増加する電圧を作り出し、入力電圧とコンパレータで比較する。増加電圧が下端からスタートする際にデジタル

ルカウンタをスタートし、増加電圧が入力電圧をクロスしてコンパレータが ON になった時点でストップする。カウンタ出力により AD 変換ができる。積分回路とコンパレータの OP アンプと積分用のキャパシタで精度がほぼ決まり (カウンタの桁数を出すのは比較的容易)、安価に AD 変換を構成できるため、パネルメータ (機器の表面に沢山はめ込んで、様々なパラメータをモニターできるようにするもの) などに良く使用されている。

デルタシグマ型

オーバーサンプリング型 と呼ばれる ADC の代表的な形式である。1 ビット (従ってコンパレータ 1 個のみ) の超低分解能 ACD を用いフィードバックを使ったデルタシグマ変換により高精度デジタル信号に変換する。詳細は後述。

7.5.3 情報の符号化

「デジタル信号序論」で述べたように、パルス振幅変調 PAM でパルス高を離散化すれば、デジタル信号になる。それをそのまま変調の形にしたのが **パルス符号変調** (pulse code modulation, PCM) である。PCM データは、クロックに合わせて何ビットかのデータを伝送するもので、少ない伝送チャンネルで送る場合は、時系列信号にしてシリアル伝送する。復調する必要がある場合は、パラレルデータに変えて DAC によりアナログ信号にする。

この直接的な PCM 法に対して、様々な変形がある。デジタル信号は符号化されたものであるため、急激な信号値変化もデータ上は表現できるが、アナログ信号は、特にそれに含まれている周波数成分の上限で表現できるよりも大きな変化は生じない。そこで、値そのものではなく前の信号値との差分を抽出して伝送することも考えられる。これを差分 PCM (differential PCM, DPCM) 方式と呼び、予測符号化方式の一種である。DPCM は一般に PCM より小さなビットレートで同精度の信号を伝送することができる。「予測」という文字がついているのは、実際には単なる差分ではなく、最も単純な前値予測方式であっても予測係数がついて、受信データ $\{x_i\}$ に対する予測値は $x'_i = ax_{i-1}$ で与えられ、送付データは差分 $\epsilon_i = x_i - ax'_i$ である。

また、PCM でない符号化形式 (時間領域で変換してから符号化するもの) など、符号化にも沢山の形式があるが、とても踏み込む余地がないので本講義ではここまでとする。

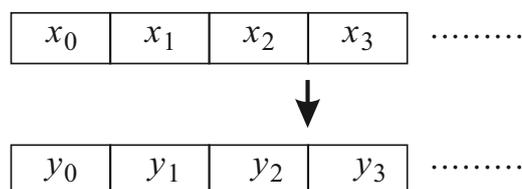
7.6 デジタルフィルタ

一旦デジタルに落とした信号は、回路中で数値として扱うことができるので非常に自由度が高く、安定な処理が可能である。このような「処理」の内、デジタル信号からデジタル信号への変換処理を **フィルタ** (filter) 作用と呼ぶ。デジタル信号処理 (digital signal processing, DSP) も極めて巨大な分野であり、講義の 1 回程度ではほとんど「舐めてみる」程度のことしかできないが、デジタルフィルタの初歩について考え、入り口を経験することにしよう。なお、この **DSP** という略語は「デジタル信号処理」という意味、および「デジタル信号プロセッサ」 (digital signal processor) の両方に用いられ、混用されている。

デジタルフィルタは物理的に行っていることはアナログフィルタとは全くと言って良い程異なっているが、応答関数の形に書くと、類似の舞台の上で考えることができる対象であることがわかる。デジタルフィルタは、アナログフィルタがスマートに滑らかに行っていたことをゴツゴツと各段階計算で押し切っているので必要な回路リソースは桁違い以上に大きい、特性が部品特性に制約されず設計に対する忠実度が高く、自由な設計が可能であり、何より、制御信号などによって容易に特性を変化させることができる。

7.6.1 ブロック・ダイアグラム

デジタルフィルタの働きを簡単にまとめると、右図のように見るのが 1 つの考え方であろう。すなわち、時系列で並んだ数列 $\{x_i\} = (x_0, x_1, \dots)$ に対して、別の数列 $\{y_i\} = (y_0, y_1, \dots)$ を得るプロセスである。ここで、数列値 y_n は、 x_n およびこれよ



りも以前の k 個の x_i の値によって決定されるとすると, $k + 1$ 変数の関数 F を使って

$$y_n = F(x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) \quad (7.12)$$

と書けることになる.

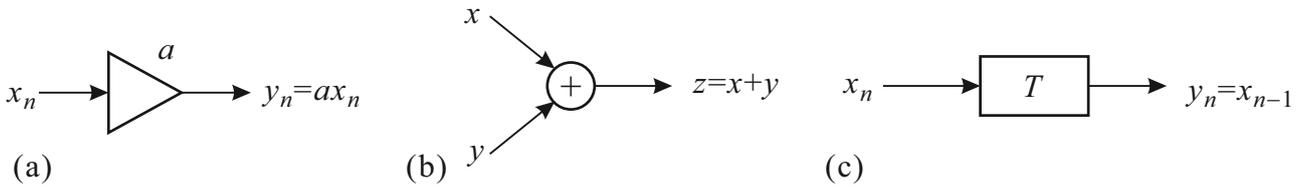


図 7.18 デジタルフィルタ用ブロックダイアグラムに使われる, 「基本ブロック」. (a) 定数倍回路. (b) 加算回路. (c) 遅延回路 (シフトレジスタ).

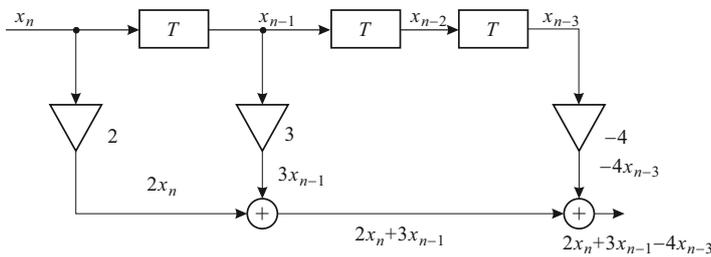


図 7.19 式 (7.13) のダイアグラム化. タル回路のバッファの形をしているが, 記入されている数倍だけする, **定数倍回路**, である. (b) は信号の和を取る **加算回路**である. (c) は, 信号を時間領域で 1 単位だけ遅らせる **遅延回路**である.

例として

$$y_n = 2x_n + 3x_{n-1} - 4x_{n-3} \quad (7.13)$$

をダイアグラム化すると前頁の図のようになる.

7.6.2 z 変換空間表示

デジタルの線形応答回路においてもアナログ回路同様, z 変換空間において伝達関数を使って応答関係を表すことができることを示した. そこで, デジタルフィルタも (片側) z 変換空間で表すことを考える.

ここではやはり例として (7.13) を考える. 今の場合, フィルタの入出力の z 変換は定義 (6.83) より,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}, \quad Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n z^{-n} \quad (7.14)$$

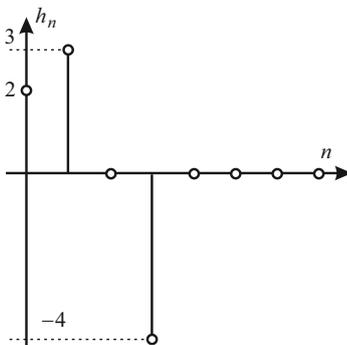
である. ここで, 表 5.2 に示した片側 z 変換の性質を思い出すと, 線形性より加算や定数倍はそのまま記述することができ, 周期 τ の k 回文の遅延は時間移動で z^{-k} をかければ良いことがわかる. 以上より, z 変換空間では

$$Y(z) = 2X(z) + 3z^{-1}X(z) - 4z^{-3}X(z) = (2 + 3z^{-1} - 4z^{-3})X(z) \quad (7.15)$$

で表されることがわかる. これより, 伝達関数を $H(z)$ とすると, (6.89) より

$$H(z) = 2 + 3z^{-1} - 4z^{-3} \quad (7.16)$$

となることがわかる.



伝達関数は $t = 0$ でインパルス入力があった時の応答の z 変換であるから、これより、このデジタルフィルタにインパルス入力があると、前ページの図のような応答があることになる。一般にフィルタの関数 $F(7.12)$ が、

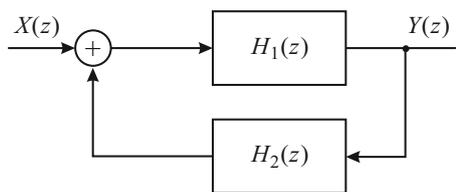
$$F(x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^k a_j x_{n-j} \quad (7.17)$$

のようにかける場合、伝達関数は

$$H(z) = \sum_{j=0}^k a_j z^{-j} \quad (7.18)$$

となる。

7.6.3 ブロックダイアグラムと伝達関数



z 変換空間内でもブロックダイアグラムを考えることができる。この際、伝達関数をブロックで表してしまうのが簡単である。左図のように、2つの伝達関数 $H_1(z)$ と $H_2(z)$ とを使って、フィードバック構造をつくるブロックダイアグラムを考えてみる。 $X(z)$ から + 演算を経て H_1 へ入力される関数を $W(z)$ と置くと、

$$Y(z) = H_1(z)W(z) = H_1(z)(X(z) + H_2(z)Y(z)),$$

$$\therefore Y(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)}X(z).$$

すなわち、全体の伝達関数は

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} \quad (7.19)$$

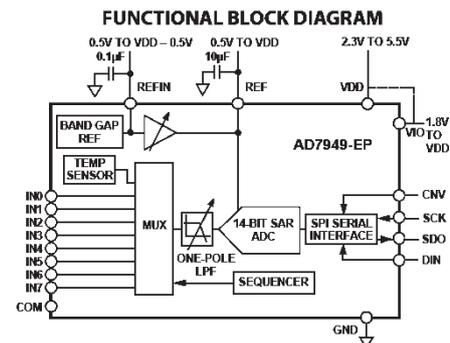
これは、むしろ、アナログ回路の場合の (4.3) 式に対応するもので、フィードバック回路の場合、一般に

$$(\text{全体の伝達関数}) = \frac{(\text{直接部分の伝達ゲイン})}{1 - (\text{フィードバック部分の伝達ゲイン})} \quad (7.20)$$

となることを示している。ここで、フィードバックをかけると、式 (7.12) の引数が形式上無限に続くことになることに注意しよう。

付録 K : A-D/D-A コンバータ選択・使用上の注意

現在の物理実験家が自ら A-D/D-A 回路を設計製作することはまず考えられないが、集積回路の形で用いる可能性はある。デジタルオーディオの発展に伴って驚異的な多ビットの DAC などが二束三文で売られるようになり、これらを上手に使用することで高速/高精度の実験測定系が安価・低労力で得られる可能性がある一方、絶対精度等には注意が必要である。



現在オーディオ用に 24 ビットの DA 変換 IC は極めて安価に手に入る。AD 変換も同様であり、中には 32 ビットのような高いビット数を持つものもある。これらはほとんど Δ - Σ 型の AD 変換器を用いており、相対精度が非常に高くして便利である。が、絶対精度はあまり当てにできないので、計測に用いる場合は精密機器による較正が必要である。

実際に ADC/DAC を選択する場合、データシートをきちんと見る必要がある。まず、どのような回路が使用されているのかを把握し、トラブルが生じた際に備える (回路形式が原因の可能性もある)。これには、ブロック図を見ておけば十分で、データシートには大抵簡単なブロック

図が掲載してある。左図は AD7949 の場合であり、中に MUX と書かれた 8 チャンネルのマルチプレクサ (入力チャンネル切替器) が入っており、ボード線図で「極」が 1 つだけある低域通過フィルター (LPF) が入れられていることがわかる。その先は「14bit SAR ADC」につながっていて、この IC が 14 ビットの抵抗逐次比較型 (successive approximation resistor) の ADC であることがわかる。

次に見なければならないのが specification table で、面倒でも定格電圧やノイズ、不確定性の最悪値などをチェックし、実験の用途に耐えるものかどうかを調べておく必要がある。

AD7949-EP					
SPECIFICATIONS					
VDD = 2.3 V to 5.5 V, VIO = 1.8 V to VDD, VREF = VDD, all specifications -55 °C to +125 °C, unless otherwise noted.					
Table 2.					
Parameter	Conditions/Comments	Min	Typ	Max	Unit
RESOLUTION		14			Bits
ANALOG INPUT					
Voltage Range	Unipolar mode	0		+VREF	V
	Bipolar mode	-VREF/2		+VREF/2	V
Absolute Input Voltage	Positive input, unipolar and bipolar modes	-0.1		VREF + 0.1	V
	Negative or COM input, unipolar mode	-0.1		+0.1	V
	Negative or COM input, bipolar mode	VREF/2 - 0.1	VREF/2	VREF/2 + 0.1	V
Analog Input CMRR	fIN = 250 kHz		68		dB
Leakage Current at 25°C	Acquisition phase		1		nA
Input Impedance ¹					
THROUGHPUT					
Conversion Rate					
Full Bandwidth ²	VDD = 4.5 V to 5.5 V	0		250	kSPS
	VDD = 2.3 V to 4.5 V	0		200	kSPS
¼ Bandwidth ²	VDD = 4.5 V to 5.5 V	0		62.5	kSPS
	VDD = 2.3 V to 4.5 V	0		50	kSPS
Transient Response	Full-scale step, full bandwidth			1.8	µs
	Full-scale step, ¼ bandwidth			14.5	µs
ACCURACY					
No Missing Codes		14			Bits
Integral Linearity Error		-1	±0.5	+1	LSB ³
Differential Linearity Error		-1	±0.25	+1	LSB

図 K.1 AD7949 の specification table の一部

最後に、A-D 変換方式と分解能、変換速度の「分布図」をあげておく。

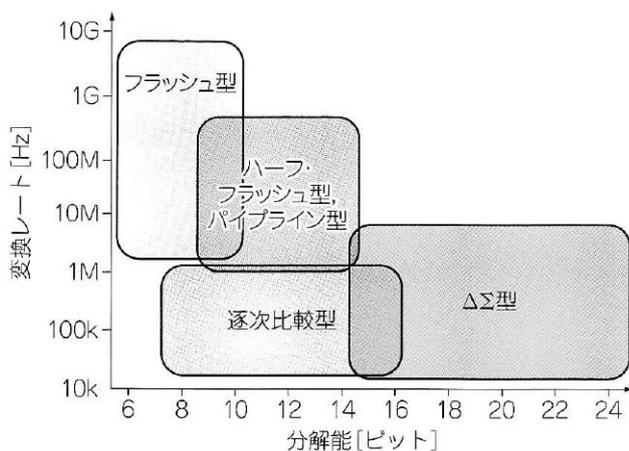


図 K.2 A-D 変換器の回路方式による、分解能、変換速度に対する分布図。

物理屋のための電子回路論 第 14 回

勝本信吾

東京大学理学部・理学系研究科 (物性研究所)

2017 年 1 月 23 日

7.6.4 デジタルフィルターの分類

デジタルフィルターは、上のようにフィードバックループを持つために (??) の引数が無限に続く形になる無限インパルス応答 (infinite impulse response, IIR) フィルターと、有限長の引数で表すことができる有限インパルス応答 (finite impulse response, FIR) フィルターとに分類することができる。フィードバックループがあってもインパルス応答が有限になる場合 (周波数サンプリングフィルタなど) は FIR フィルターである。

また、通過周波数帯域により、アナログの場合と同様、低域、高域、バンド (Low, High, Band) 通過フィルター (それぞれ, LPF, HPF, BPF), また帯域除去フィルター (band elimination filter, BEF) などにも分類される。振幅特性形状からは、これもアナログ同様、バターワース、チェビシェフ、などの分類が可能である。

7.6.5 FIR フィルター

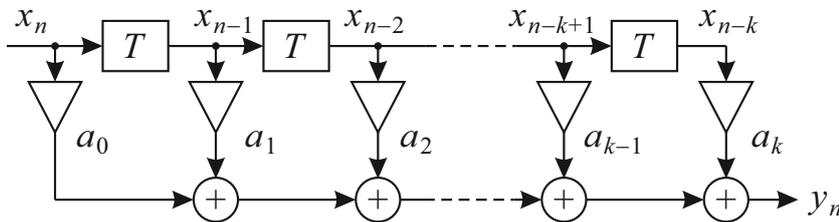


図 7.20 FIR フィルターの一般形 (??) のブロックダイアグラム。

線形 FIR フィルターは、一般に (??) の関数で表され、図 7.20 のようなブロックダイアグラムが描ける。加算数列が有限であるから、伝達関数 (??) には極がなく安定である。FIR フィルターの周波数特性は、(??) より、 $z = e^{i\omega\tau}$ において、

$$H(e^{i\omega\tau}) = \sum_{j=0}^k a_j e^{-ij\omega\tau} \quad (7.21)$$

である。

まず、もっとも単純な移動平均、および隣接差分、

$$F_{\pm}(x_n, x_{n-1}) = (x_n \pm x_{n-1})/2 \quad (7.22)$$

については、

$$H_{\pm}(e^{i\omega\tau}) = e^{-i\omega\tau/2} \begin{pmatrix} \cos(\omega\tau/2) \\ i \sin(\omega\tau/2) \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

となる。

ω の区間 $[0, \pi/\tau]$ に対する周波数特性は、左の図のように移動平均 H_+ がローパスフィルター特性、隣接差分 H_- がハイパスフィルター特性となる。また位相は下の図のように ω に対してリニアに変化する。これは FIR フィルター一般に成立する特徴である。

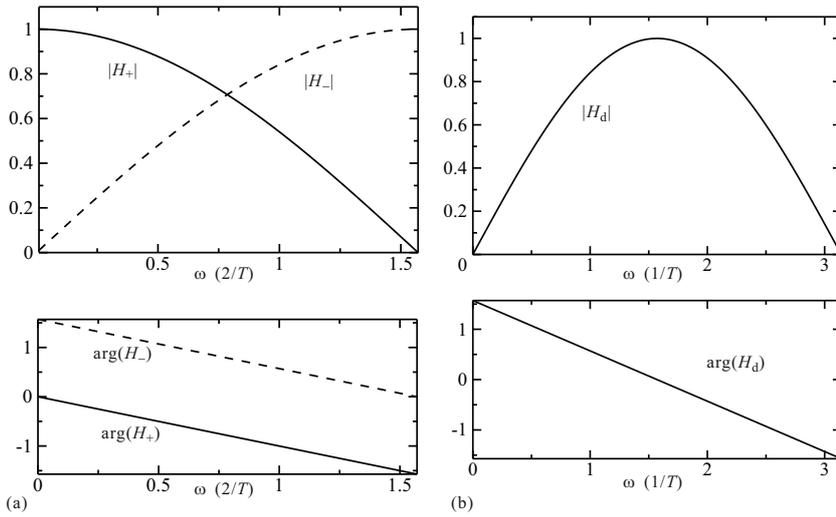


図 7.21 (a) 移動平均, 隣接差分操作によるフィルターの周波数応答 (上が伝達関数の絶対値, 下が位相) 特性. ω は $2/\tau$ 単位で計っているので, $\pi/2$ 以下の領域に限られる. (b) 移動平均の差分に対して (a) と同様の周波数特性. ただし, ω は $1/\tau$ 目盛り.

移動平均の差分

$$F_d = [(x_n + x_{n-1}) - (x_{n-1} + x_{n-2})]/2 = [x_n - x_{n-2}]/2 \quad (7.24)$$

は,

$$H_d = (1 - e^{-2i\omega\tau})/2 = ie^{-i\omega\tau} \sin \omega\tau \quad (7.25)$$

より, 図 7.21(b) のようにバンドパスフィルターとして働く. なお, これらデジタルフィルターの有効周波数範囲は, 標本化定理より $1/2T$ 以下である.

7.6.6 IIR フィルター

本節冒頭で「デジタルフィルターは安定」と述べたが FIR フィルターの場合であり, フィードバックによってインパルス応答が無限時間続く IIR フィルターの場合は安定性が問題となる. 安定であるためにはインパルス応答を y_n として,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad (7.26)$$

すなわち, 無限に続くとしても 0 に収束することが必要である.

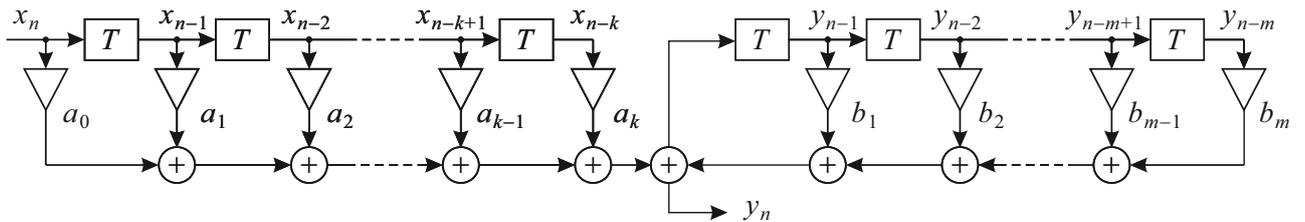


図 7.22 IIR フィルターの一般形ダイアグラム

IIR フィルタをダイアグラムで一般的に表すと, 図 7.22 のように, FIR フィルタを通過した後, フィードバックループを経て出力するものが考えられる. 関数形で表すと

$$y_n = \sum_{l=0}^k a_l x_{n-l} + \sum_{j=1}^m b_j y_{n-j} \quad (7.27)$$

のように書ける. この両辺を z 変換すると,

$$Y(z) = X(z) \sum_{l=0}^k a_l z^{-l} + Y(z) \sum_{j=1}^m b_j z^{-j} \quad (7.28)$$

であるから、伝達関数は

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{l=0}^k a_l z^{-l}}{1 - \sum_{j=1}^m b_j z^{-j}} \quad (7.29)$$

となる。

IIR フィルタは、ループを使用することで FIR フィルタに比べて少ない回路リソースで必要なフィルタ特性を得られる可能性がある一方、安定条件 (7.26) を満たさなければならない点が設計上の問題点となる。簡単な安定条件として、(7.29) の分母がゼロになる極となる z が、 z 変換の収束域である $|z| > 1$ になれば良い。すなわち、極が単位円内に入っている必要がある。

7.6.7 デジタルフィルタの設計

デジタルフィルタの設計には様々な方法が存在する。FIR フィルタの場合、Remez 法と呼ばれるものが良く使用され、Scilab などのプログラムでもデフォルトで remez という関数が用意されている。が、ここでは原理・手続きが簡単な窓関数法 (window function method) について簡単に紹介する。

周波数通過フィルタを考える場合、LPF について考えておけば十分 (他は周波数変換により LPF から変換できる) である。理想 LPF は、カットオフ周波数 ω_c 以下は完全透過し、以上を完全カットするもので、

$$G(e^{i\omega\tau}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c, \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \omega_N \end{cases} \quad (7.30)$$

と表される。 $\omega_N = \omega_s/2 = \pi/\tau$ はナイキスト周波数である。(7.30) は 5.3 節で見たように、 $[-\omega_N, \omega_N]$ の範囲で考えることにすればこの外側では $2\omega_N = \omega_s$ の周期を持つ周期関数としてフーリエ級数展開し、

$$G(e^{i\omega\tau}) = \frac{\omega_c}{\omega_N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \text{sinc}\left(n \frac{\omega_c}{\omega_N}\right) e^{-ni\omega\tau} = \gamma_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \text{sinc}(n\gamma_c) z^{-n} \quad (7.31)$$

が得られる。 $\gamma_c \equiv \omega_c/\omega_N$ である。すなわち、このような理想 LPF の n 次係数は、通過域幅のナイキスト周波数に対する比を γ として sinc 関数 $\text{sinc}(n\gamma_c)$ で与えられることがわかる。

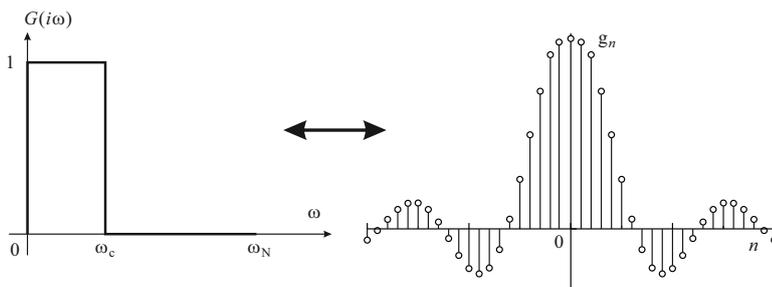


図 7.23 理想低域通過フィルタ (LPF) の周波数特性模式図 (左) と、これをフーリエ級数展開した際の n 次項 $\text{sinc}(n\omega_c/\omega_N)$ の模式図 (右)。

FIR フィルタで理想 LPF を実現しようとする、(7.31) のように無限次数のフィルタが必要となる。sinc 関数 $\text{sinc}(x)$ は、 $x \rightarrow \infty$ に対して $1/x$ で小さくなるので有限次数で打ち切ると、図 7.24(a) のように周波数特性が波を打つリップル特性となる。これは、sinc 関数中の sin 関数が有限振幅を持っているところで急にカットされたため、これに近い振動数の成分で滑らかにされることがなくなってリップルとして現れたものである。

そこで、急激に打ち切るのではなく何らかの窓関数 (window function) を乗じて打ち切りの裾を緩やかにすることを考える。この目的のためによく使用されるのが、カイザー (Kaiser) 窓と呼ばれるもので

$$w_n = \begin{cases} \frac{I_0\left(\alpha\sqrt{1-(n/L)^2}\right)}{I_0(\alpha)} & |n| \leq L, \\ 0 & |n| > L \end{cases} \quad (7.32)$$

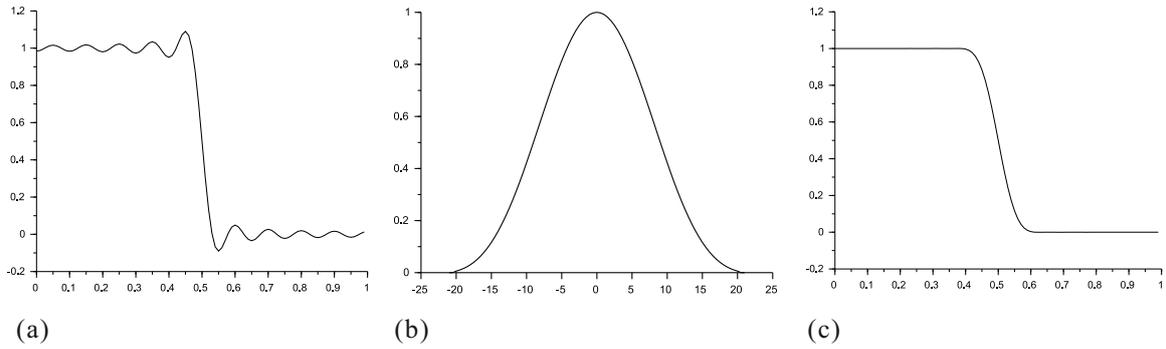


図 7.24 (a)(7.31) の理想 LPF の次数を $n = 20$ で打ち切ったフィルタの周波数特性. ω/ω_N を横軸にとった. また, $\omega_c/\omega_N = 0.5$ とした. (b) カイザー窓関数の例. $\alpha = 7$, $L = 20$ として (7.32) をプロットしたもの. (c) (a) のフィルタに, (b) の窓関数を乗じたフィルタの周波数特性.

で与えられる. ここで, I_0 は 0 次第 1 種変形ベッセル関数である. α , L はそれぞれリップルの最大値, 遷移領域の幅 $\Delta\omega$ と関係するパラメタである. 図 7.24(b) にその形状例を示した. これを (7.31) に乗じると, 図 7.24(c) のような周波数特性となり, リップルがほぼ消えてバターース (Butterworth) 特性に近づいていることがわかる (対数プロットをすると, リップルの存在は確認できる).

IIR フィルターの場合は, 伝達関数が有理式で書かれるため, 要求に適合するアナログフィルターの伝達関数からの変形を行う形で設計されることが多い. バタワース特性を持つ n 次の LPF の伝達関数は

$$\Xi(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\omega_k}{s - s_k}, \quad s_k = r_c \exp \left[i \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right\} \right] \quad (7.33)$$

と書ける. これは, インパルス応答のラプラス変換であるから, インパルス応答はヘビサイド関数を $u_H(t)$ と書いて

$$\xi(t) = u_H(t) \sum_{k=0}^{n-1} w_k \exp(s_k t) \quad (7.34)$$

である. これを $\tau = 1$ で標準化 (離散化) すると,

$$h_n = h_{Hn} \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{ns_k}, \quad \therefore H(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{w_k}{1 - \exp(s_k)z^{-1}}. \quad (7.35)$$

これは, (7.33) で

$$(s - s_k)^{-1} \rightarrow (1 - \exp(s_k)z^{-1})^{-1} \quad (7.36)$$

という置換を施した形である. (7.36) を用いて IIR フィルターに変換する方法をインパルス不変法 (impulse invariant method) と呼ぶ.

これに対して双一次 z 変換法 (bilinear z -transform) では,

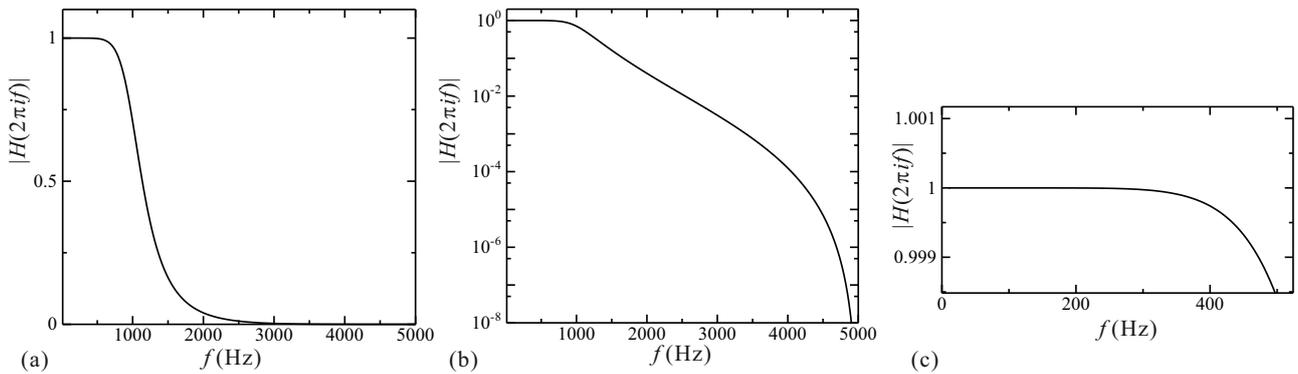
$$s \rightarrow \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (7.37)$$

という置換を行う. エイリアシングによる特性劣化が少ない方法として知られている.

図 7.25 はこのようにして, 4 次のバターース特性フィルタについて設計したもので伝達関数は

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - a_3 z^{-3} - a_4 z^{-4}} \quad (7.38)$$

のように書け, 係数は図 7.25 中のテーブルのようになる. 図にも示したように, 高々 4 次のフィルターでリップルが全くない特性を作ることができる.



coef.	0	1	2	3	4
a_n		2.3695130072	-2.3139884144	1.0546654059	$-1.8737949237 \times 10^{-1}$
b_n	$4.8243433577 \times 10^{-3}$	$1.9297373431 \times 10^{-2}$	$2.8946060146 \times 10^{-2}$	$1.9297373431 \times 10^{-2}$	$4.8243433577 \times 10^{-3}$

図 7.25 双一次 z 変換法で設計した IIR-LPF の周波数特性. パワースペクトルについて設計した. 設計パラメータは本文を参照せよ. (a) 線形プロット. (b) 縦軸対数プロット. 0 付近でもリップルが生じていない. (c) カットオフ周波数以下の特性の拡大図. リップルが見られない. 下の表は, (7.38) の係数をサンプリング周波数 10kHz, 遮断周波数 1kHz に対して双一次 z 変換に対して計算したもの.

7.6.8 複素信号処理と位相ロックループ

アナログ回路でも多数の信号線を使えば多次元データ伝送が可能であるが, デジタルの場合は同期回路であれば多次元に対する問題がより小さくなる. したがって, データ次元を 2 次元として複素数として扱うことも容易である. 1 次元の実信号の ω 成分 $\cos(\omega t + \theta_0)$ に対して複素信号 $\exp[i(\omega t + \theta_0)]$ を作り出すには $\pi/2$ だけ位相の遅れた \sin 成分を作り出して虚数単位 i を乗じて加えれば良いから, このプロセスをブロックダイアグラムで表すと, 図 7.26(a) のようになる. ここで「ヒルベルト変換器」と書かれた部分が $\pi/2$ の位相遅れを生じる所であり, その伝達関数位相-周波数特性は図 7.26(b) のようになる. これも一種のフィルターであり, ヒルベルトフィルターと呼ばれる.

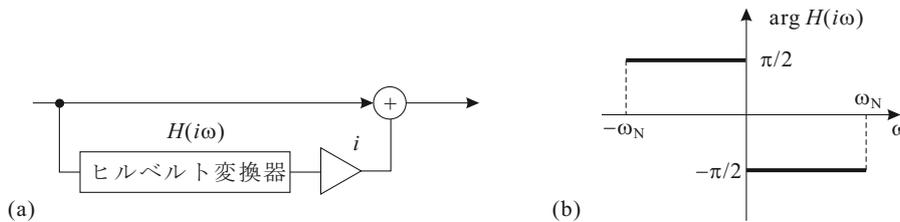


図 7.26 (a) ヒルベルト変換器による複素信号生成回路のブロックダイアグラム. (b) ヒルベルト変換器位相の ω 依存性.

これによって 2 次元化した信号を複素数として扱うことで様々な応用が可能となる. 図 7.27 は位相ロックループ (phase-locked loop, PLL) と呼ばれる回路をブロックダイアグラムで模式的に表したものである.

ここではデジタル回路を基本として説明するが, 当然同機能の回路はアナログでも実現でき, PLL 機能全体が IC 化されて広く使われている. 高周波で使用されることが多いため, デジタル実装に関してはサンプリング周波数, 演算速度等から一定の制限がある. 一方, デジタル回路の利点は, 線形性が高く精度の良い回路が形成でき, 応用の際にも様々な信号を自在に取り出せることにある.

図 7.27(a) に PLL 回路の全容を模式的に示した. PLL 回路に特徴的な部分は, 電圧に応じて発振周波数が変化する電圧制御発振器 (voltage controlled oscillator, VCO) を備えている点である. VCO は, 電圧入力 (今のがないときには適当な周波数 ω_0 で発振する PLL 回路ではまず, 入力信号の位相を検出し, これを VCO の位相と比較し, 位相差信号をループフィルタを通して出力する. これが VCO に入って発振周波数が変化し, 全体のフィードバック回

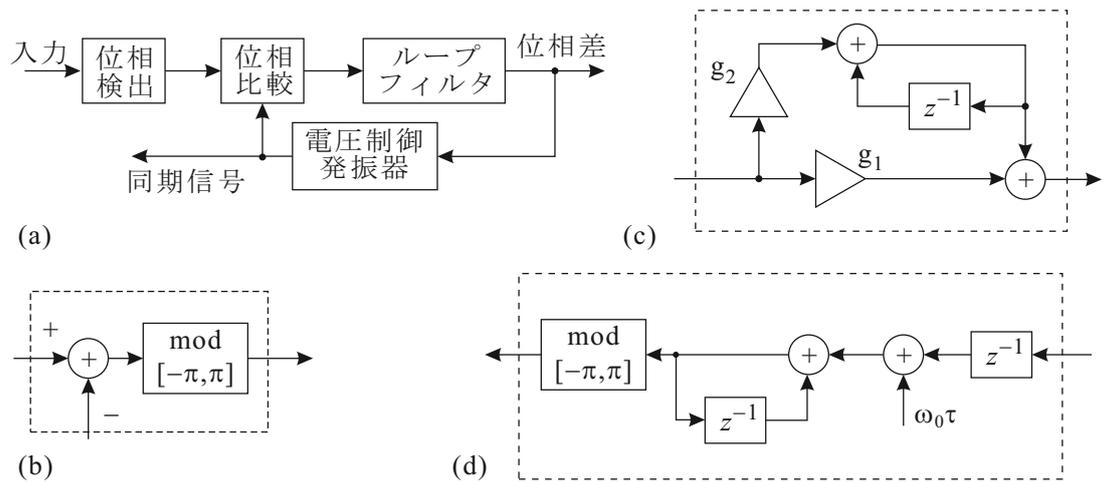


図 7.27 (a) 位相ロック回路のブロックダイアグラム. (b) ループフィルタ部分. (c) 位相比較部分. (d) 電圧制御発振器部分.

路により位相差信号が極小になるように調整される. 入力信号と ω_0 が近ければ, VCO の発振周波数と位相は (一定さを除き) 入力信号にロックされる. 以下各部に分けて回路構成を調べる.

位相検出・比較

まず, 通常の実信号入力を図 7.26(a) の回路を通すことで複素信号化 ($x_n^{(r)}, x_n^{(i)}$) し, 位相データ

$$\phi_n = \arctan \frac{x_n^{(i)}}{x_n^{(r)}} \quad (7.39)$$

を得る. 同様のことを VCO の出力に対して行い, 位相データ φ_n を得, 図 7.27(b) の位相比較器では差分 $\phi_n - \varphi_n$ を計算する. 常に $[-\pi, \pi]$ 内に値が来るように適当に 2π の加減算を行う.

ループ・フィルタ

位相比較出力が送られるループ・フィルタは図 7.27(c) のような IIR フィルターで, 伝達関数は

$$H(z) = g_1 + \frac{g_2}{1 - z^{-1}} \quad (7.40)$$

と書かれる. 特に第 2 項の $(1 - z^{-1})^{-1}$ は 1 の z 変換であるから, インパルス入力に対して出力が一定で無限に続く, 「完全積分型」と呼ばれる回路になっている. ここは, 位相差から制御出力を作り出す部分で PLL 回路の特性を決める重要な部分である. 位相差回路から誤差出力がなければループ・フィルタは一定の出力を出し続け, 誤差出力に応じて常にこれをゼロにする方向に変化するから, 「ロック」がかかった状態では VCO の出力周波数 ω_v は入力信号周波数 ω_i にロックされ, $\omega_v = \omega_i$ となる. (7.26) が満たされていないため, ループ・フィルタは必ずしも安定ではない. 安定のためには条件

$$g_2 < -2g_1 + 4 \quad (7.41)$$

が満たされる必要がある.

VCO

図 7.27(d) に示した VCO 回路にはどこにも「発振部」がない. 結局必要なのは位相情報であるため, 位相情報だけを作っている. 同期信号が必要な場合は位相から振動出力を得る回路を用意しこれにを入力するようにする.

以上が PLL 回路であり, 大変応用の広い回路である. 信号選択, 周波数逡倍, 分割, 変換などに使うことができるほか, VCO への制御出力を使って FM 検波などにも使える.

7.6.9 Δ - Σ 型 A-D コンバーター

Δ - Σ 型 AD 変換 (変調) は, オーバーサンプリング型 AD コンバーターの代表例で, 1 ビットのコンパレータを使い, 量子化誤差をフィードバックすることで極めて誤差の大きな信号を「元手」として超高分解能デジタル信号

を作り出してしまふ。実際には2次以上のフィルターを使用することが多いが、図7.28(a)には、ごく簡単な原理を示してある。コンパレータはあくまで1ビットであるが、出力を入力に戻して引き算をし、これを再びコンパレータへ入力することを繰り返すと、出力がHになる頻度は、入力信号の大きさに比例するようになる。実際の出力は、図7.28(b)のように、HやLの信号が続くことで結合し、PWMに類似の波形となる。

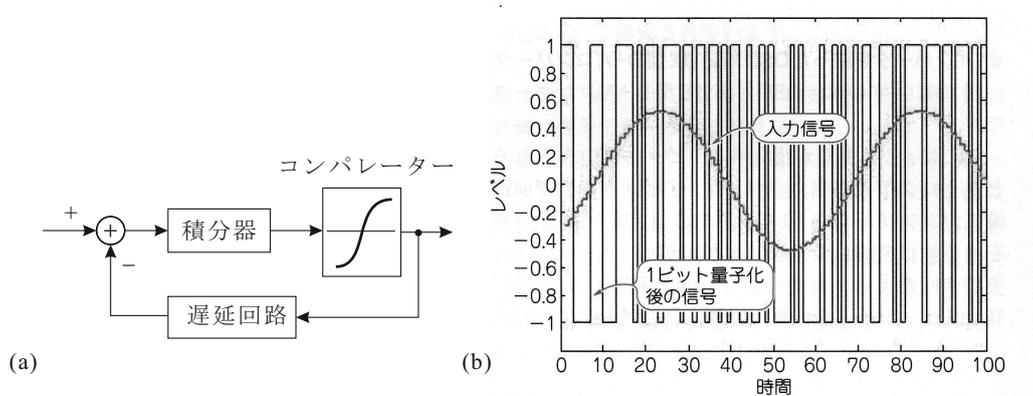


図 7.28 (a) Δ - Σ 型変調器の原理図. (b) アナログ入力 (赤線) に対する Δ - Σ 変調信号の例.

7.7 適応フィルター

7.7.1 適応フィルターのコンセプト

デジタルフィルターの利点は、特性をダイナミックに変更できる、という点である。適応フィルター (adaptive filter) は、入力信号に応じて自動的に特性を変化させるものである。ごく平たくブロック図にしてしまうと図7.29(a)のようになる。フィルタに斜めに矢印が付いているのは可変キャパシタや電圧源同様、フィルタの係数が変更可能、という意味である。

たとえば、FIR フィルタ (図7.20) で各次の係数 a_i が外部信号で制御可能であれば、そこに制御信号を送るプログラムを書き、出力の様子を見ながらこれらを変更すれば良い。実際にはIIR フィルタはこの用途に使用するうえで困難があり、専らFIR フィルタが使用されている。

さて、図7.29(a)では「所望信号」との差が小さくなるようにフィルター係数を調整するようになっているが、最初から「所望信号」がわかっているならば、わざわざフィルターなどを使用する必要はないはずである。実際の適応フィルターの用途の一例を図7.29(b)に、この変形版として示した。これは、適応線スペクトル強調器 (adaptive line enhancer) と呼ばれる回路で、信号にランダムな雑音が重畳しているときに雑音除去のために使用する。不思議なことに、所望信号として雑音が混入した原信号そのものを使用している。しかし、フィルター通過信号の方には遅延回路が入っているため、信号に比して速い変化をする雑音は常に通過信号とは異なる成分として検出され、これを平均

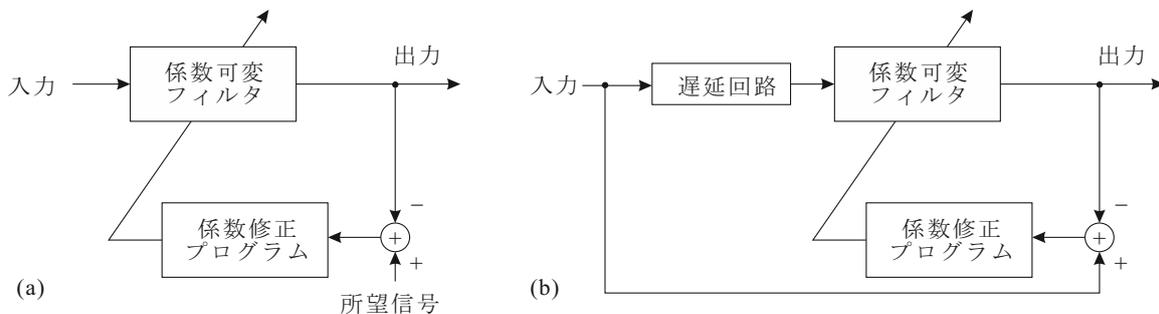


図 7.29 (a) 適応フィルターの概念図. (b) (a) を若干変形した線スペクトル強調器.

して小さくするようにフィルタを設計すれば、信号線が強調され、ノイズが除去されるフィルタが自然に形成される。

7.7.2 適応フィルタのアルゴリズム

入力 $x[n]$ に対して出力

$$y[n] = \sum_{m=0}^M h_m x[n-m] \quad (7.42)$$

を持つ FIR フィルタを考える (左図). 所望信号を $d[n]$ と書くと, 適応フィルタは誤差信号

$$\epsilon[n] \equiv d[n] - y[n] \quad (7.43)$$

の 2 乗期待値 $\langle \epsilon^2[n] \rangle$ を最小化するように自動的に係数を修正するものである. これは, 実験値に何らかの未定定数を持つ関数をフィットさせる最小二乗法 (least square (LS) algorithm) に相当する. すなわち, FIR フィルタの係数を求めるには, 一種の LMS アルゴリズムをハードウェアとして用意する必要がある.

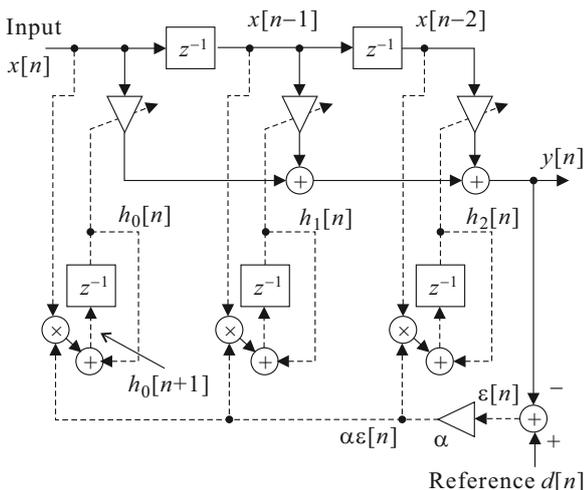
最急降下法

LS のアルゴリズムも様々であるが, 大きなリソースを必要とする逆行列計算を避けて試行錯誤的にパラメータを求める場合, あるパラメータセットに対して $\langle \epsilon^2[n] \rangle$ を計算し, これがより小さくなるようにパラメータセットを変化させ, 段階的に極小点を与えるセットを見つける方法が取られる.

このような手法の代表的アルゴリズムが最急降下法 (steepest descent method, SDM) と呼ばれ, 次のようなものである. 各ステップで得られるパラメータセットに, 初期値を $l=0$ として番号 l で指数付けする. m 個パラメータがあったとしてそのセットを $\{p_k\}$ ($k=1, \dots, m$) とし, ステップ数を $\{p_k[l]\}$ のように示すと, SDM の 1 ステップは,

$$p_k[l+1] = p_k[l] - \alpha \nabla_k \{ \langle \epsilon^2[n] \rangle [l] \} \quad (7.44)$$

のように書くことができる. ここで, ∇_k は, パラメータ空間での空間微分 (gradient, 傾度) で, 右辺第 2 項は第 l ステップのパラメータセットでの $\langle \epsilon^2[n] \rangle$ が最も急速に減少する方向への変化を表している. α は ∇_k と共に変化幅を決める定数で, 問題に合わせて収束速度と精度との兼ね合いで設定する.



7.7.2.1 最小平均二乗法

(7.46) を更に簡単化したものが最小平均二乗法 (least mean square, LMS) で, 「平均」操作を省略してその時点でのデータをそのまま使用して係数を算出する.

$$h_k[l+1] = h_k[l] + 2\alpha \epsilon[l] x[l-k]. \quad (7.47)$$

上の図が 3 パラメータの場合の例である.

∇_k の項をどう求めるかが問題である. まず, 入力と「所望」信号について 0 の周りに分布する定常不規則過程と仮定する (いずれも実際には「信号」なわけであるが, 分布は雑音と同じガウシアン). この簡単化により

$$\langle x^2[n] \rangle = \text{const.}, \quad \langle x[n] \rangle = 0, \quad (7.45a)$$

$$\langle d^2[n] \rangle = \text{const.}, \quad \langle d[n] \rangle = 0 \quad (7.45b)$$

である. これと, (7.42) の FIR フィルタ独特の出力形式から, ∇_k の項は

$$\nabla_k \{ \langle \epsilon^2[n] \rangle [l] \} = -2 \langle \epsilon[n] x[n-k] \rangle \quad (7.46)$$

のように書くことができる.

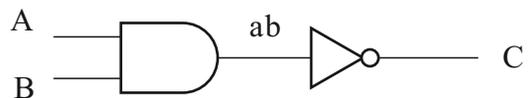
7.8 ハードウェア記述言語：HDL

最後に、時間もほとんどなくなってしまったが、ハードウェア記述言語 (hardware description language, HDL) について簡単に触れておこう。以上みたように、フィルタのような簡単なものでも多桁のシフトレジスタや掛け算器を大量に要し、これらをハードウェアで構成するのは容易ではない。一方、専用の LSI を設計するのは巨大なリソースを必要とする。そこで、PLD や FPGA(後述) を使い、プログラムによってこれらを個別に構成することが考えられてきた。

HDL は主にデジタル回路の動作仕様を記述するための (人工) 言語である。現在ではソフトウェア記述言語も並列処理を前提としたものが増えているが、HDL の場合は最初から経時的でかつ並列的な動作を記述できるように設計されている。その後発展形として米国の国防総省により very high speed IC を冠して VHDL が作られ、またシミュレーションを強化する発展形として米国のケイデンス社により Verilog HDL が開発された。これらの言語は、ソフトウェアが高級言語→アセンブラ→機械語のような階層構造を持っているのに対応して高レベルから低レベルまでの階層構造を持つに至っている。国防総省による公式に推奨された VHDL は当然広く使用されているが、Verilog HDL も実際に FPGA にインプリメントする際のツール類を先行して出したことや、言語仕様に優れた点が多いことからやはり広く使用されている。

HDL 自身は、テキストで記述され、制御構造等ほぼ高級言語と同等に持っている一方、プログラム構造その他大きく異なっている。下の図は VHDL で NAND ゲートを記述した例であるが、これでわかるように、VHDL プログラムはライブラリ宣言、エンティティ宣言、アーキテクチャ宣言の 3 部に分かれている。

```
-- Library declaration -----  
library IEEE;  
use IEEE, STD_LOGIC_1164.ALL;  
-- Entity declaration -----  
entity NAND_CIRCUIT is  
port(  
  A : in std_logic;  
  B : in std_logic;  
  C : out std_logic  
);  
end NAND_CIRCUIT;  
-- Architecture declaration -----  
architecture RTL of NAND_CIRCUIT is  
  signal ab : std_logic;  
begin  
  ab <= A and B;  
  C <= not ab;  
end RTL;
```



ライブラリ宣言

回路生成用のライブラリ，およびパッケージの宣言を行う部分で，use の後についているのがライブラリ中のパッケージの宣言である。

エンティティ宣言

回路中の NAND ゲートのような回路の「エンティティ」についての枠組みを示す。generic でプログラム中で使用する汎用値を宣言し，port によって外部回路との接続ポート，信号伝達方向を宣言する。

アーキテクチャ宣言

エンティティ宣言で示した各エンティティについて，ポート間でどのようなロジックによって動作するか，を規定する。“ \leftarrow ” は信号の方向を決定する。また，begin - end で囲まれた内部は，論理関係のみが記述されていて処理の時間的な流れではない。原則として「同時進行」である。

7.8.1 PLD, FPGA

HDL が成立するためのハードウェア上の基礎が programmable logic device (PLD) や，field programmable gate array (FPGA) と呼ばれる IC である。(FPGA は広義の PLD に含まれる。) これらは，IC 内に多数の部品がアレイとして配置され，配線されており，ただし，配線の適当なクロス部分に「スイッチ」と称する結線・断線が可能なものが配置されている。並べ方は，図 7.30(a) のように PLD が組み合わせ論理回路を前提に NOT アレイと AND アレイを組み合わせ，これらを結線・断線する。これは，6.4.2 節で見たように，組み合わせ論理回路は一般に主加法標準展開で書けることに対応しており，回路リソースの許す範囲で一般の論理式を表現できることを意味する。

一方，FPGA の方は，非常に多種類の回路がこの名前では呼ばれているが，比較的多い構成として図 7.30(b) のように，ブロックに分かれたものをやはり多数の ON/OFF できる結線でつないでおり，ブロック内には FF が用意されていて順序回路も構成することができる。最近では，アナログ回路も混在するようなもの (mixed signal FPGA) も現れ，CPU をモノリシックに組み込みプログラムでロジックを表現できるようにするなど，多方面に発展しつつある。

配線を結線・断線するための方法としては，初期のころ，特に TTL を多く使用していた頃はヒューズ結線をして電流でヒューズを飛ばして断線することで行っていた。CMOS スイッチが一般化してからは，PROM，EPROM など 1 回書き込みのメモリが使われ，やがて EEPROM やフラッシュなどの書き換え可能メモリが使われるようになっていく。

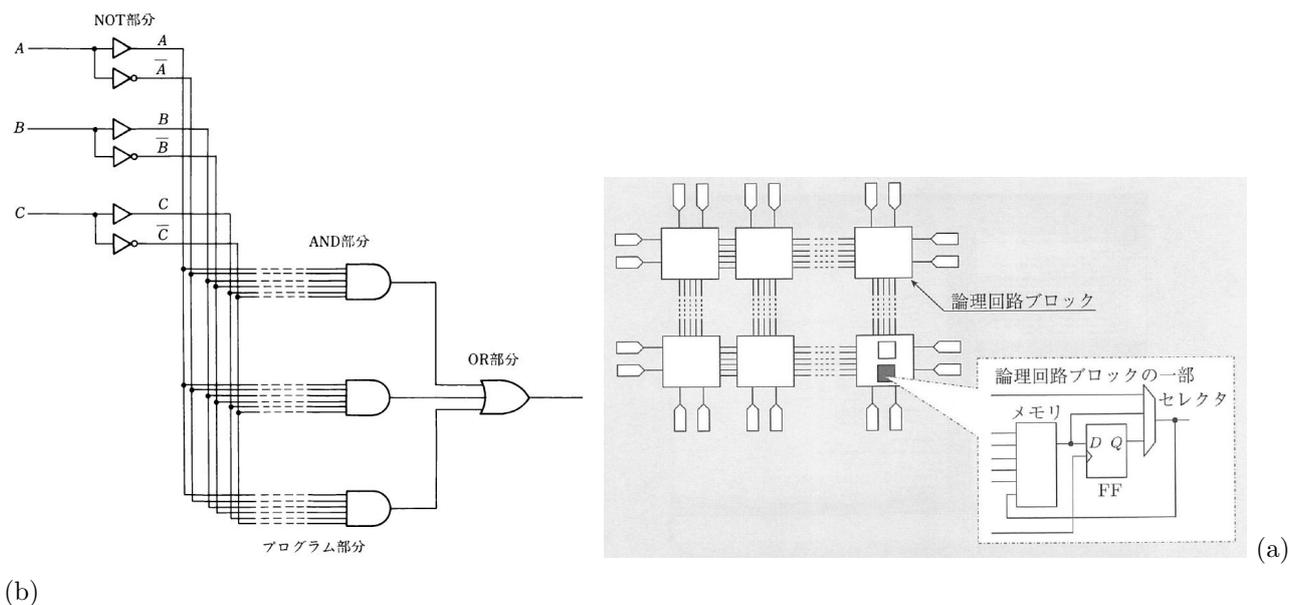


図 7.30 (a) PLD の回路構成の例. (b) FPGA の回路構成例

参考文献

- [1] A. V. Oppenheim, R. W. Shafer, “Discrete-Time Signal Processing” (Prentice Hall, 1999).
- [2] M. H. Hayes, “Statistical Digital Signal Processing and Modeling” (Wiley and Sons, 1996).
- [3] S. C. Douglas, “Introduction to Adaptive Filters” Ch.18 in *Digital Signal Processing Handbook* Eds. V. K. Madisetti and D. B. Williams (CRC Press, 1999).
- [4] 小宮 浩 「高周波 PLL 回路のしくみと設計法」 (CQ 出版社, 2011).

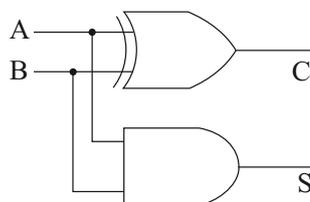
付録 L : HDL によるデジタル回路例

L.1 加算器

ブロックダイアグラムで \oplus と簡単に書いてしまうが、実際には例えば 2 進数パラレル信号 2 つを受けて加算してパラレル信号として出力する回路で、沢山の端子を必要とする。最も基本の 1 ビット加算 $A+B=C$ は、下の真理値表で表され、AND と XOR を使って書け、これを VHDL で書くと次のようになる。

```
-- Library declaration -----
library IEEE;
use IEEE, STD_LOGIC_1164.ALL;
use IEEE, STD_LOGIC_UNSIGNED.ALL;
-- Entity declaration -----
entity HADDER is
port(
A : in std_logic;
B : in std_logic;
C : out std_logic;
S : out std_logic
);
end HADDER;
-- Architecture declaration -----
architecture RTL of HADDER is
begin
S <= A XOR B;
C <= A AND B;
end RTL;
```

A	B	S	C
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



L.2 ロード付きカウンタ

「必要数だけのパルスを打つ」というのは意外にどのパルスジェネレータにもない機能で、講師は結局自分でロード付きカウンタを組んで実験する羽目になったことがある。ロード付きカウンタの簡単な VHDL 記述を示しておこう。

```
-- Library declaration -----
library IEEE;
use IEEE, STD_LOGIC_1164.ALL;
use IEEE, STD_LOGIC_UNSIGNED.ALL;
-- Entity declaration -----
```

```

entity COUNTER is
generic (WIDTH : integer :=4);
port(CLK, RESET, LOAD, INC : in std_logic;
DATA : in std_logic_vector(WIDTH-1 downto 0);
COUNT : out std_logic_vector(WIDTH-1 downto 0);
);
end COUNTER;
-- Architecture declaration -----
architecture RTL of COUNTER is
signal COUNT_TMP : std_logic_vector(WIDTH-1 downto 0);
begin
COUNT <= COUNT_TMP;
process (CLK, RESET) begin
if (RESET = '1') then
COUNT_TMP <= (others => '0');
elsif (CLK'event and CLK = '1') then
if (LOAD = '1' ) then
COUNT_TMP <= D;
elsif (INC = '1' ) then
COUNT_TMP <= COUNT_TMP + '1';
else
COUNT_TMP <= COUNT_TMP - '1';
end if;
end if;
end process;
end RTL;

```